

# Uogólniony i zreinterpretowany model materiałów lepkosprężystych jako narzędzie badania dynamiki wybranych indeksów giełdowych

Autor: dr Marzena Kozłowska

Praca doktorska wykonana w ramach Studiów Doktoranckich Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Promotor: prof. Ryszard Kutner

5 Ogólnopolskie Sympozjum: Fizyka w Ekonomii i Naukach Społecznych  
SGGW, Warszawa, 25-27 listopad 2010 r.

## Reologiczny Model Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego

### Założenia modelu:

W obszarach narastających i pękających spekulacyjnych bańki giełdowych, dominującą rolę odgrywają gracze giełdowi bazujący na analizie technicznej (a nie fundamentalnej).

Zależność chwilowej nadwyżki zleceń  $U(t)$  od chwilowej, względnej wielkości danego indeksu  $X(t)$  i chwilowego, względnego wolumenu obrotów  $V(t)$  na nim jest biliniowa:

$$U(t) = a_o X(t) + b_o V(t)$$

$$D(t) = D(t) - S(t), \quad V(t) = \min[D(t), S(t)]$$

$D(t)$  - chwilowy popyt na akcje tworzące dany indeks,  
 $S(t)$  - chwilowa podaż,  
 $a_o, b_o$  - niezależne od czasu współczynniki.

Zakładam również:

$$V(t + \Delta t) + eX(t + \Delta t) = c_o V(t) + d_o X(t)$$

Stąd w przybliżeniu:

$$\frac{dV(t)}{dt} = C_o V(t) + D_o X(t) + E \frac{dX(t)}{dt}$$

Pamiętając o:

$$U(t) = a_o X(t) + b_o V(t)$$

Z obu równań (w powyższych ramkach) otrzymuję:

$$U(t) + \tau_o \frac{dU(t)}{dt} = G_o \tau_o \frac{dX(t)}{dt} + G_e X(t)$$

Szczególnym przypadkiem jest równanie powszechnie używane w ekonomii ( $\lambda$  - głębokość rynku):

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{\lambda} U(t)$$

## Uproszczona hipoteza rynku plastycznego

Uprozczone równanie dynamiki indeksu giełdowego:

$$U(t) + \tau_o \frac{dU(t)}{dt} = G_o \tau_o \frac{dX(t)}{dt} + G_e X(t) \quad \tau_o = -1/C_o$$

$$G_e = a_o(1 - B_e E), \quad B_e = -b_o/a_o$$

$$G_o = a_o(1 + B_e D_e/C_e)$$

Podstawowe równanie reologiczne Standardowego Modelu Zenera Ciała Plastycznego:

$$\sigma(t) + \tau_o \frac{d\sigma(t)}{dt} = G_o \tau_o \frac{d\epsilon(t)}{dt} + G_e \epsilon(t)$$

Analogie między reologią i giełdą papierów wartościowych

Giełda papierów wartościowych	Ciało plastyczne
Indeks giełdowy $X(t)$	Odstąpienie $\epsilon(t)$
Nadwyżka zleceń $U(t)$	Napężenie $\sigma(t)$
Wolumen obrotów $V(t)$	Chwilowa temperatura $T(t)$
Stopy wzrostu na jednostkę czasu $\frac{d \ln X}{dt}$	Wsp. rozszerzalności liniowej $\left(\frac{d \ln L}{dT}\right)_\epsilon$

## Hipoteza rynku plastycznego

Fraktalne, całkowite, niejednorodne równanie relaksacji:

$$X(y) - X(0) = -\tau_1^{-\alpha} D_y^{-\alpha} X(y) + \frac{1}{G_o} \tau_o^{-\alpha} D_y^{-\alpha} U(y) + \frac{1}{G_o} [U(y) - U(0)],$$

$$\alpha > 0, \quad y = |t - t_c|, \quad \tau_1 = \tau_o G_o / G_e$$

### Rozwiązanie zagadnienia początkowego

Zakładam:

$$U(y) = \frac{U(0)}{2} [\exp(i(\omega - \Delta\omega)y) + \exp(i(\omega + \Delta\omega)y)]$$

Rozwiązanie:

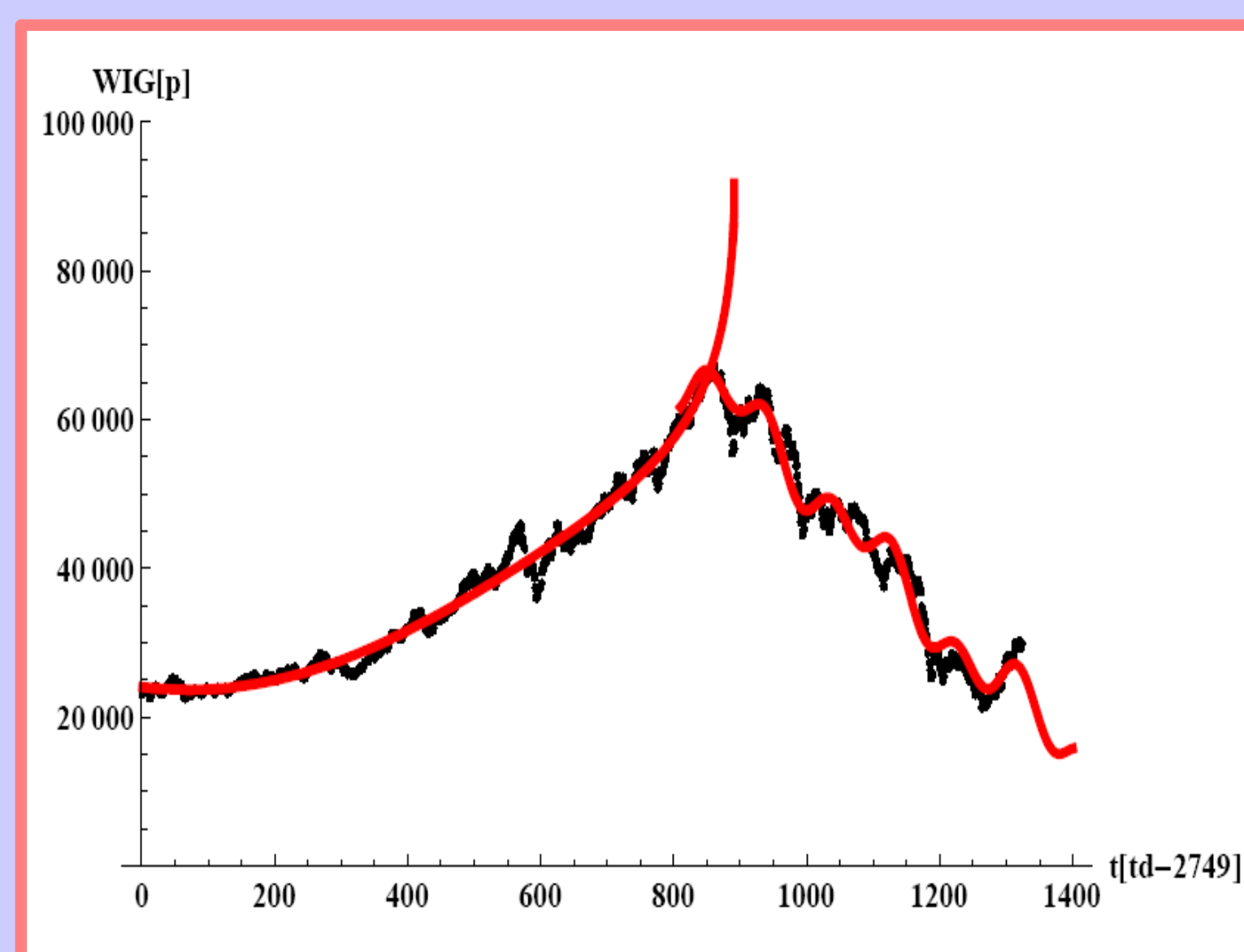
$$X(y) \approx (X(0) + X_1) E_\alpha \left( -\left(\frac{y}{\tau_1}\right)^\alpha \right) - X_1 \cos(\omega y) \cos(\Delta\omega y)$$

gdzie:

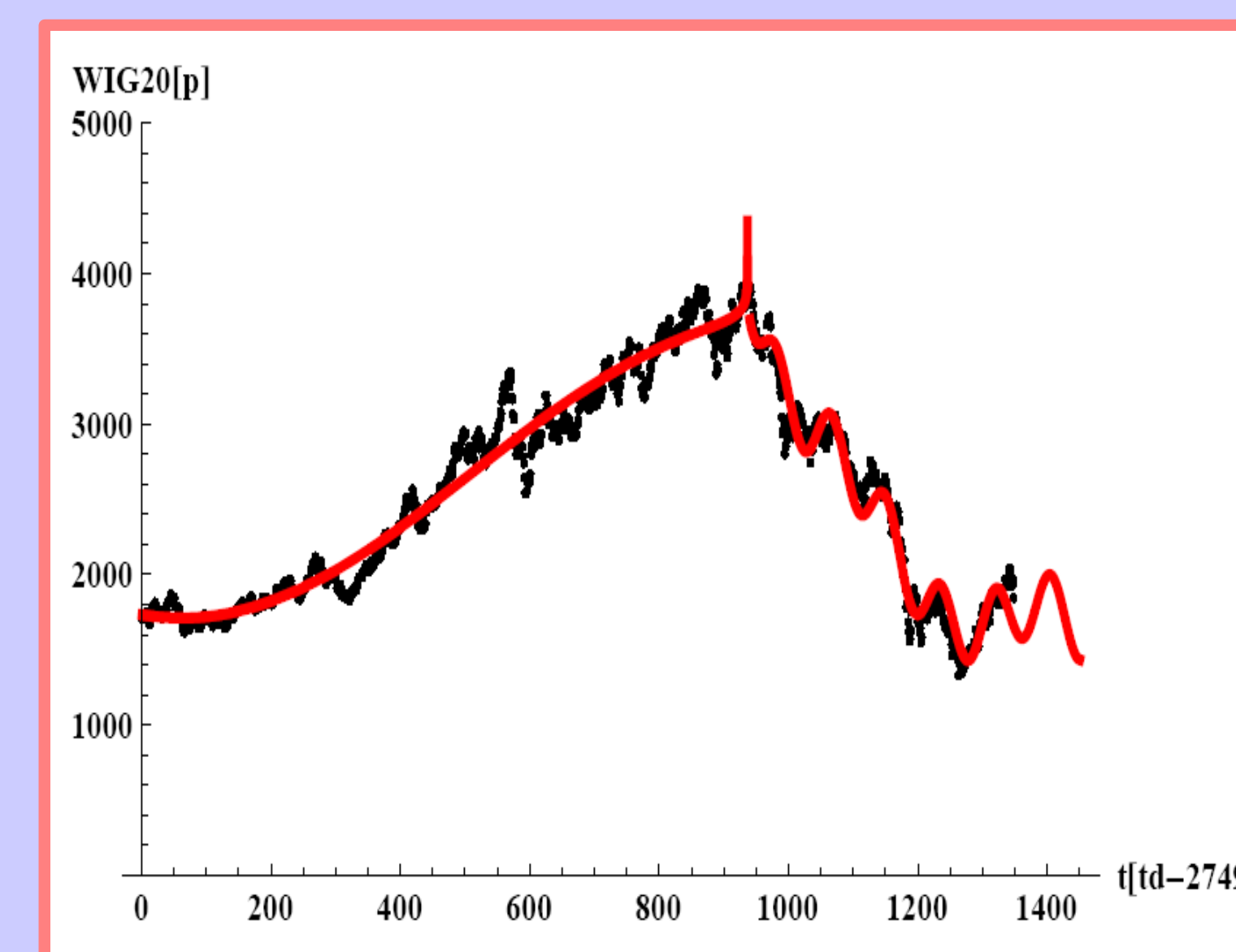
$$X_1 = \frac{1}{G_o} \left(\frac{\tau_1}{\tau_o}\right)^\alpha U(0)$$



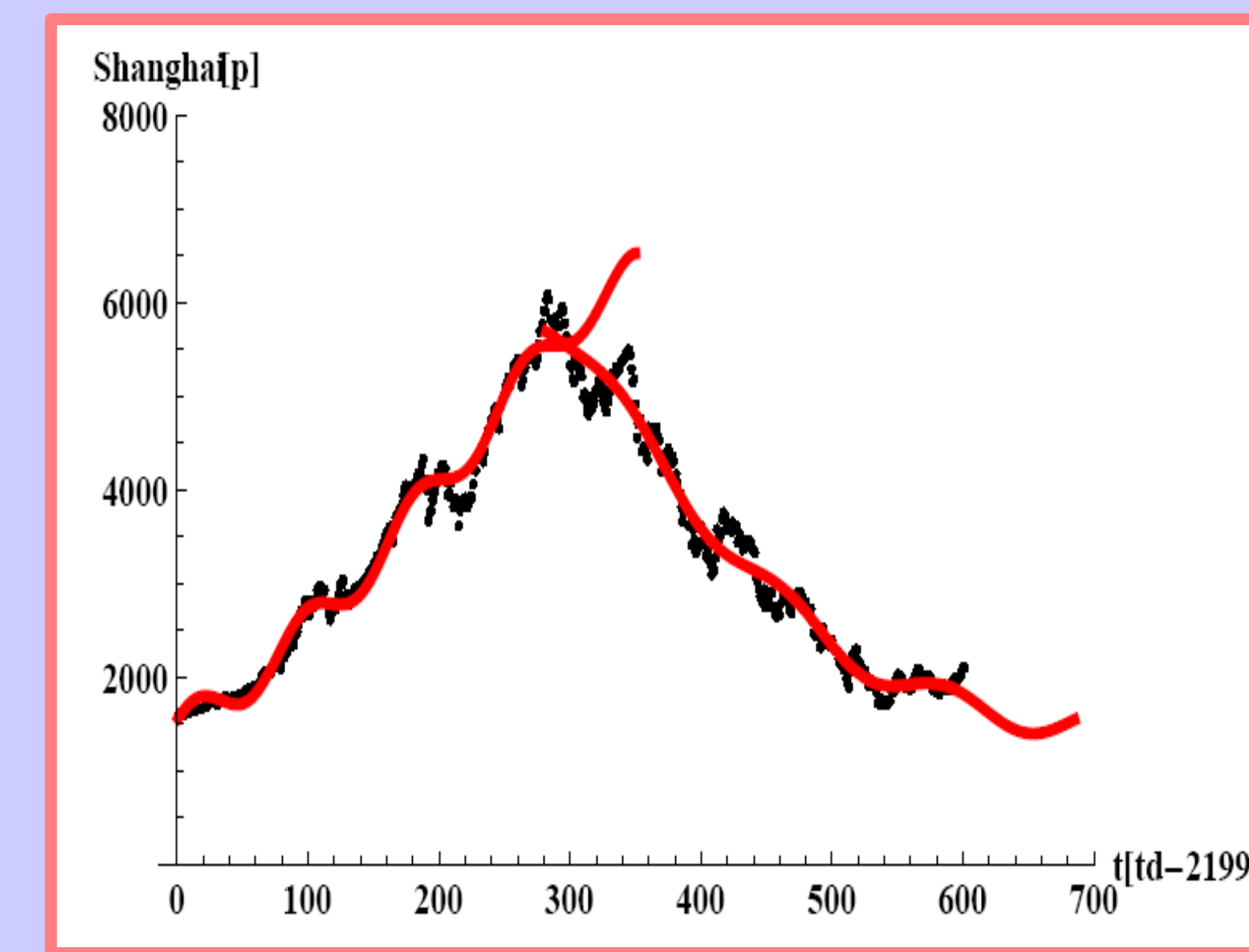
Warszawski Indeks Giełdowy - notowania dzienne



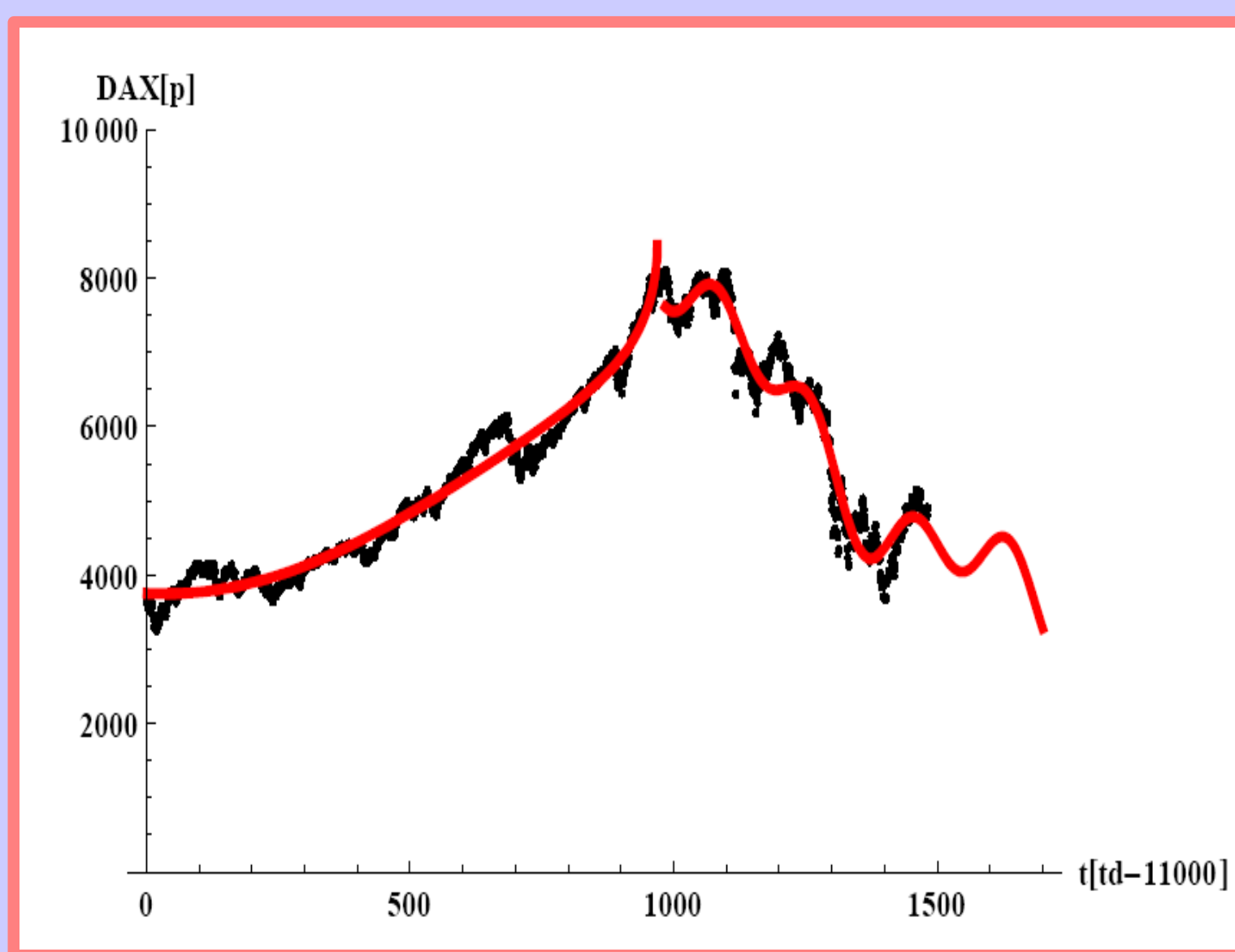
Ostatni pik indeksu WIG (2004.02.06 - 2009.05.18) z funkcją Mittag-Lefflera z oscylacjami na lewym zboczcu oraz relaksacją ML z dudnieniami



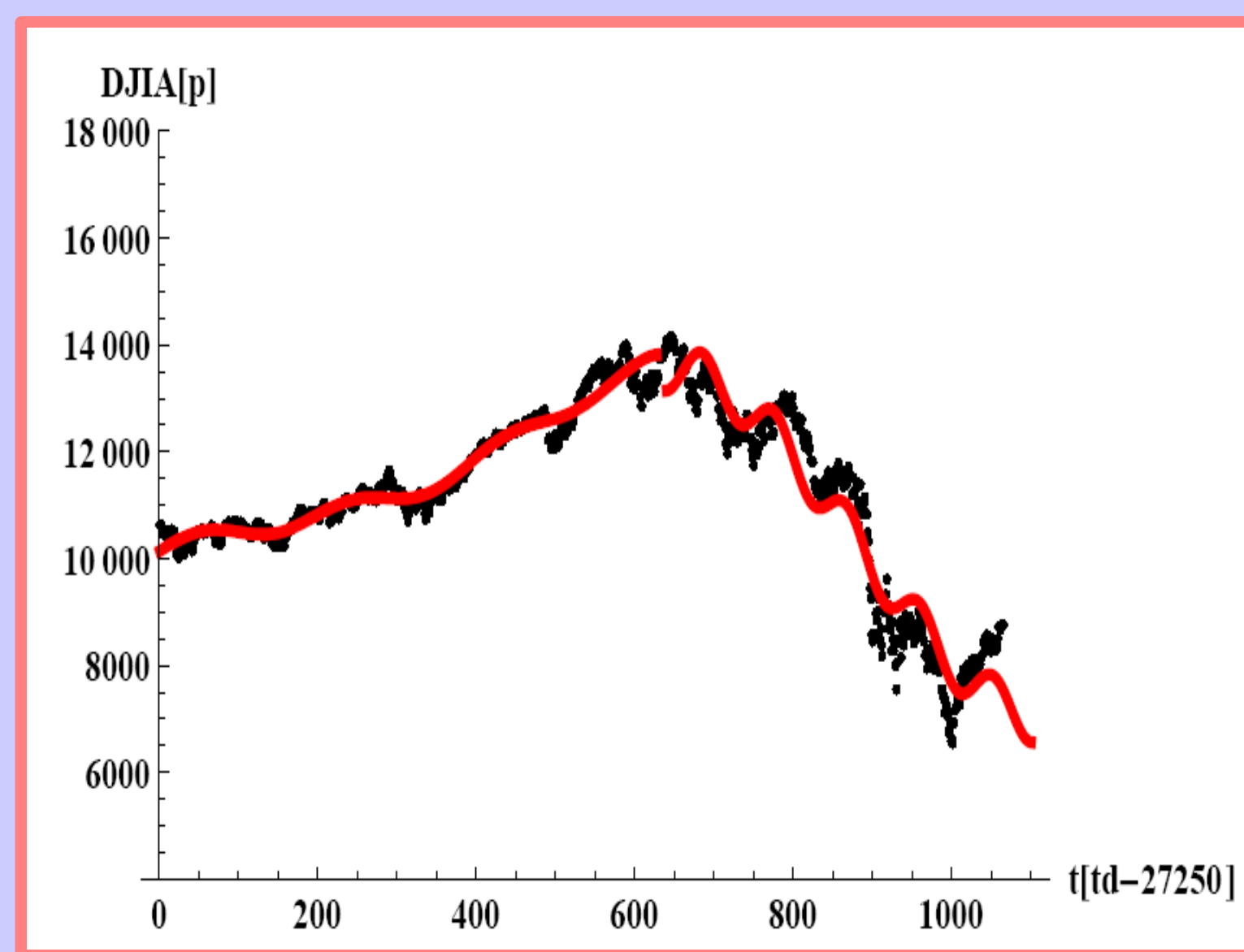
Ostatni pik indeksu WIG20 (2004.02.09 - 2009.06.22) z funkcją Mittag-Lefflera z oscylacjami na lewym zboczcu oraz relaksacją ML z dudnieniami



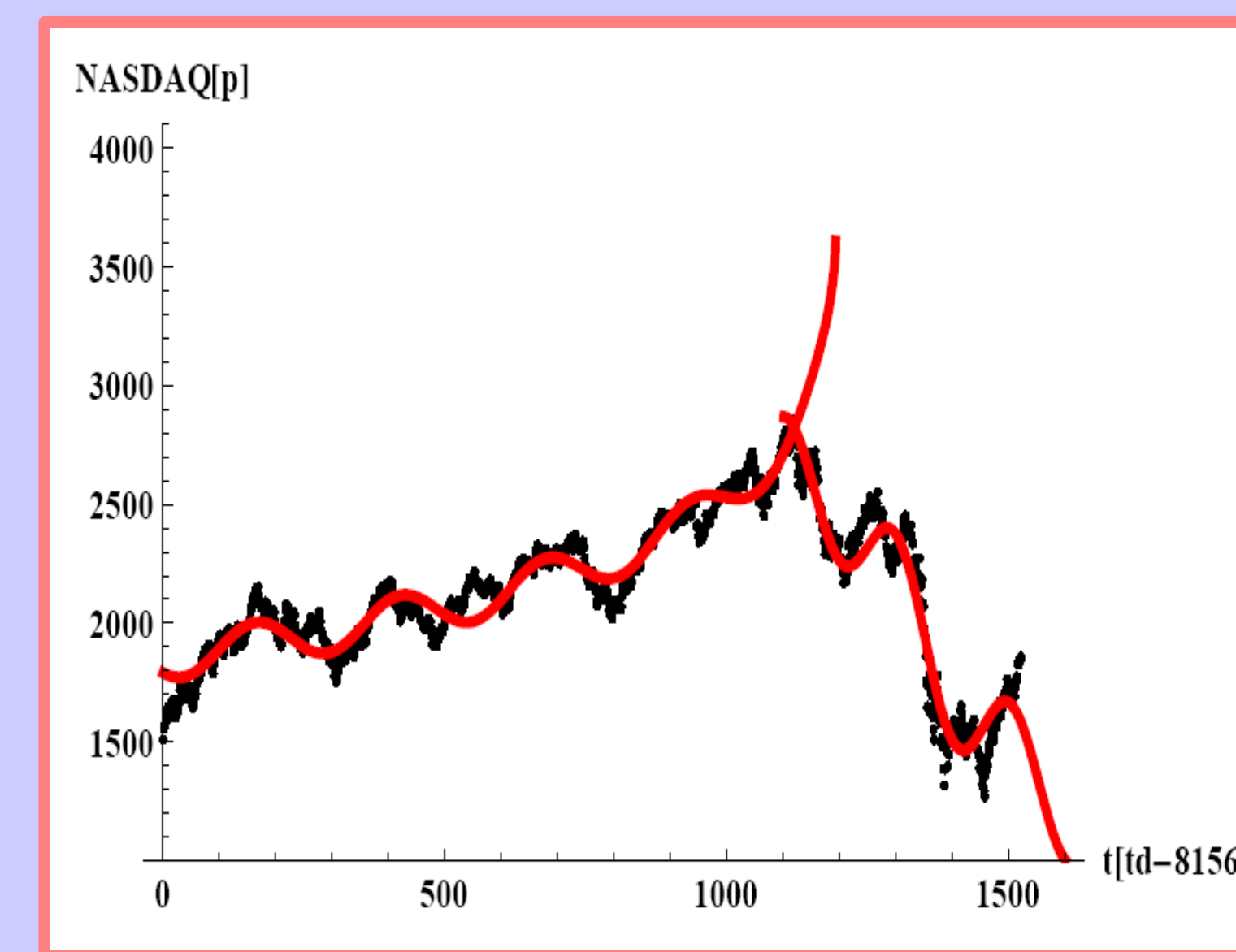
Ostatnie maksimum indeksu Shanghai Composite (2006.08.15 - 2009.02.05)



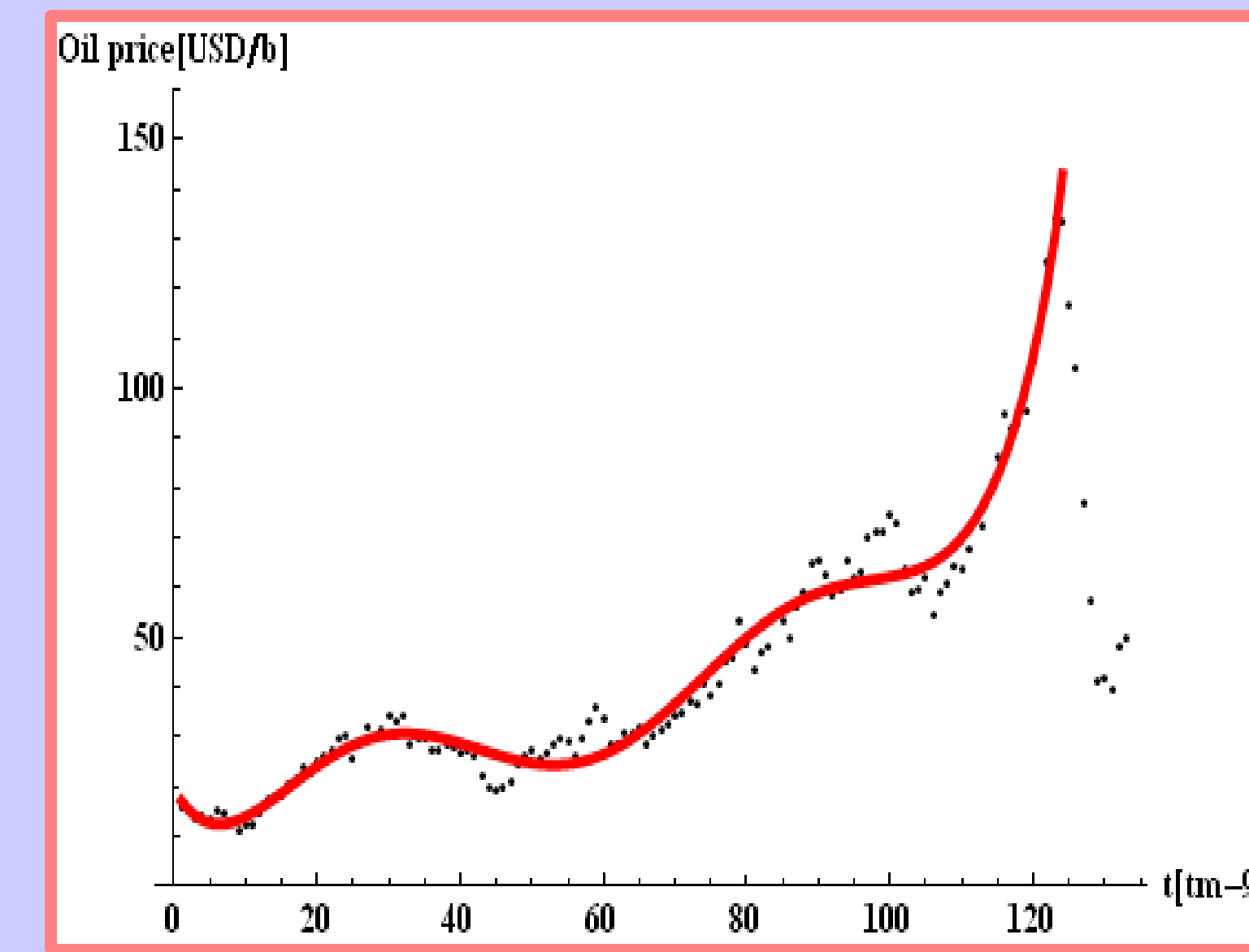
Lokalny, ostatnie maksimum indeksu DAX (2003.09.04 - 2009.01.07)



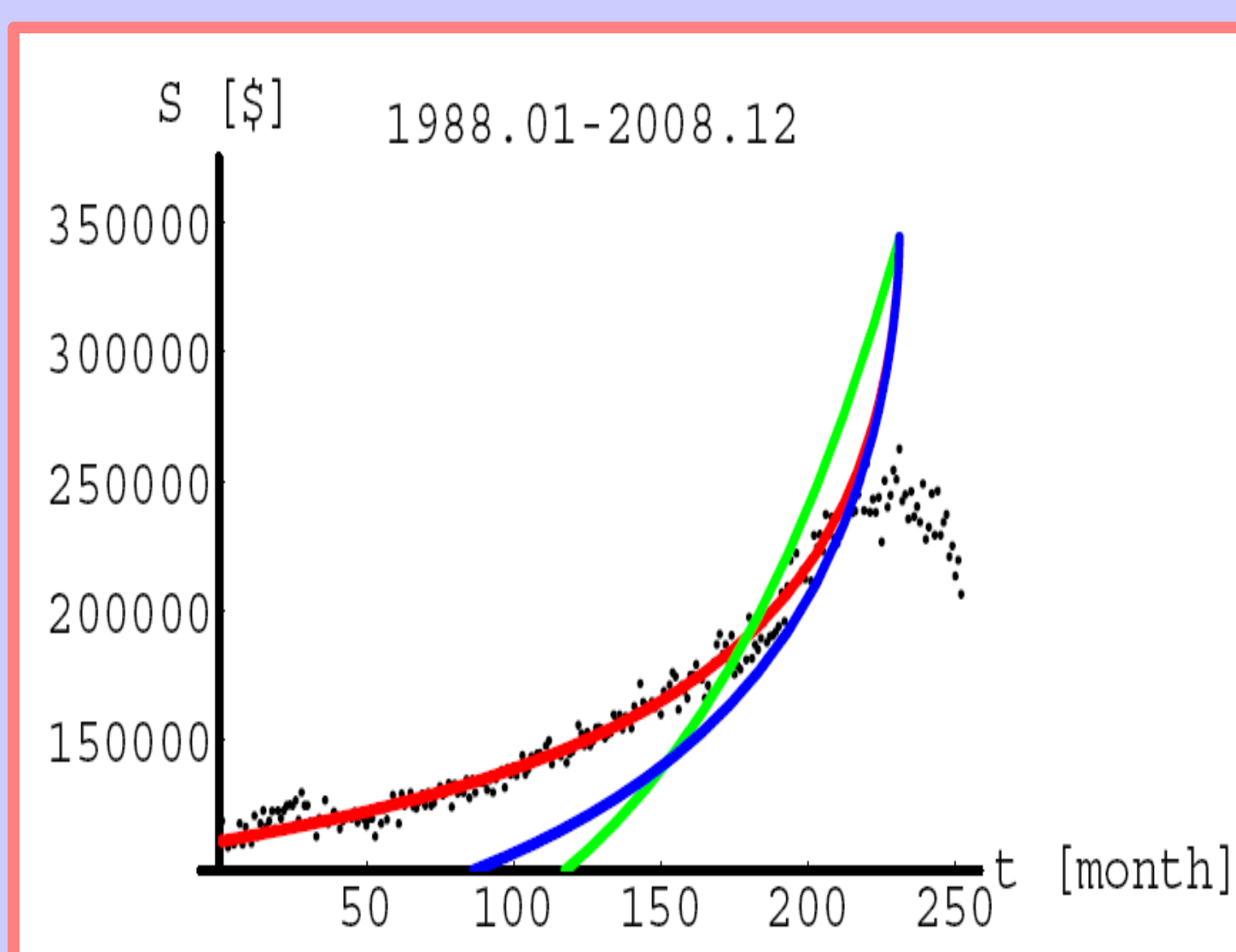
Ostatni pik indeksu DJIA (2005.03.16 - 2009.06.09)



Ostatni pik indeksu Nasdaq NASDAQ (2003.05.23 - 2009.06.09)



Ceny ropy naftowej z funkcją Mittag-Lefflera wraz z oscylacjami (1998.04 - 2009.04)



Mediany cen domów i parcel sprzedanych w U.S.A z funkcją Mittag-Lefflera (czerwona krzywa), prawo KWW (krzywa niebieska), prawo Nuttinga (krzywa zielona).

## Wnioski:

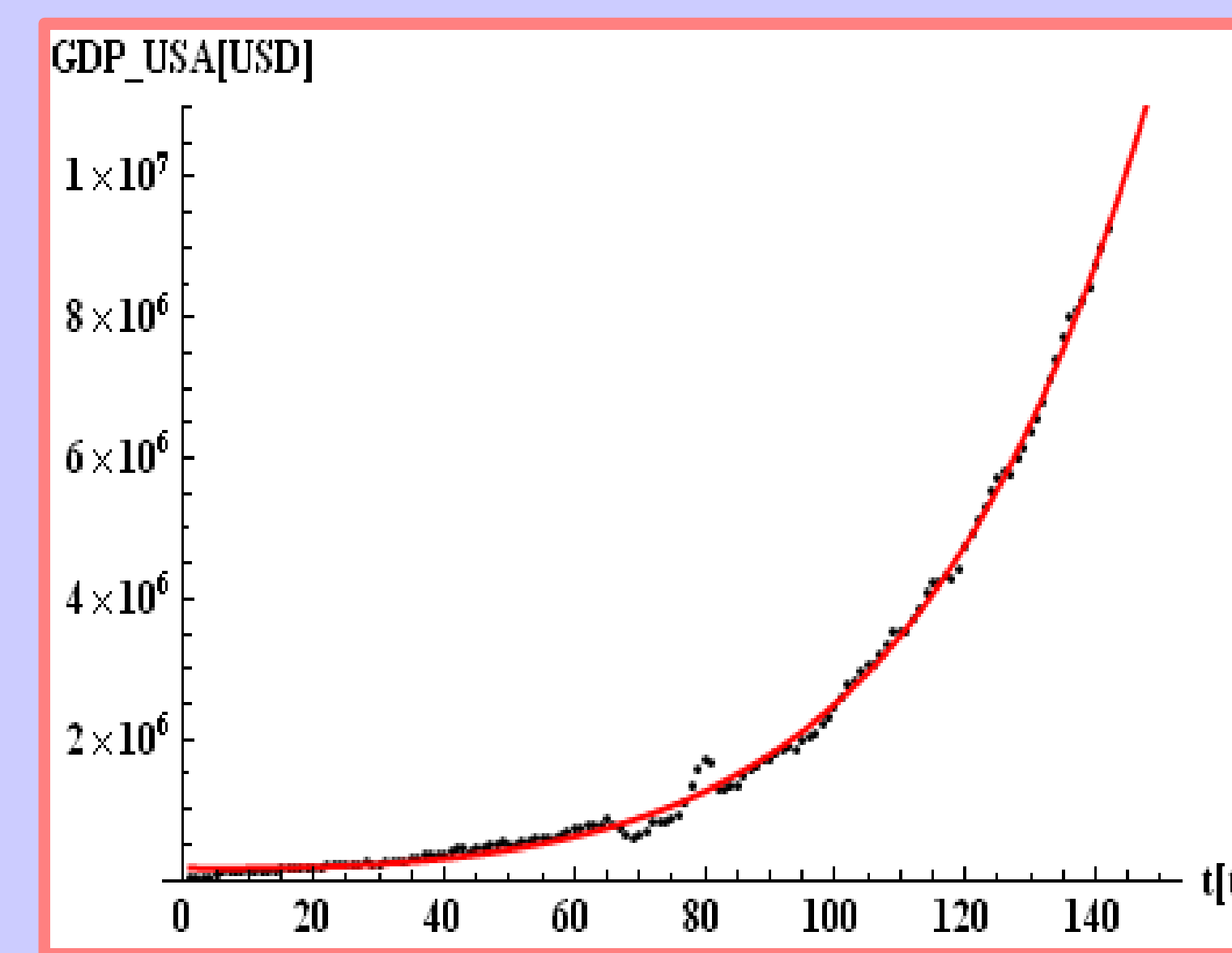
Dysponujemy funkcją (uogólniony eksponent Mittag-Lefflera) opisującą lokalne piki indeksów giełdowych i innych wybranych wskaźników.

Podejście to pozwala także na analizę mikrostruktury na poziomie sieci inwestorów.

Funkcja ML pozwala na (krótkoterminowe) prognozowanie.

Istnienie wykładnika  $\alpha$  pozwala na klasyfikowanie kształtu zboczyc pików.

Model dostarcza wskazówek zmniejszających ryzyko inwestowania w papiery wartościowe.



PKB w USA z okresu ostatnich 150 lat

Tabela 1. Parametry otrzymane w wyniku fitowania, opisujące maksima związane z ostatnim kryzysem finansowym dla wybranych indeksów giełdowych.

Parameter	WIG	DAX	DJIA	SCI
$t_c^L$	892 ± 73	969 ± 1	627 ± 3	350 ± 2
$t_c^R$	810 ± 0	940 ± 0	640 ± 0	282 ± 0
$\tau_1^L$	105 ± 420	426 ± 391	333 ± 38	196 ± 15
$\tau_1^R$	272 ± 20	426 ± 72	165 ± 191	138 ± 8
$\alpha^L$	0.57 ± 0.23	0.52 ± 0.03	1.29 ± 0.02	1.39 ± 0.02
$\alpha^R$	1.562 ± 0.025	1.12 ± 0.03	1.938 ± 0.575	1.30 ± 0.13
$\omega^L$	0.004 ± 0.001	0.004 ± 0	0.011 ± 0.0	0.075 ± 0.001
$\omega^R$	0.043 ± 0.001	0.009 ± 0.0	0.030 ± 0.070	0.051 ± 0.001
$\Delta\omega^L$	0.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0	0.022 ± 0.0	0.0 ± 0.0
$\Delta\omega^R$	0.007 ± 0.0	0.025 ± 0.0	0.040 ± 0.070	0.0 ± 0.0

Tabela 2. Współczynniki kalibrujące uzyskane w wyniku dopasowania dla wybranych indeksów takich jak w tabeli 1.

Parameter [p]	WIG	DAX	DJIA	SCI
$X_1^L + X_1^R$	60081 ± 85273	4698 ± 82	3486 ± 40	4810 ± 75
$X_1^L - X_1^R$	41963 ± 334	5464 ± 70	4010 ± 110	3846 ± 39
$X_1^L$	-8659 ± 2352	-763 ± 35	-332 ± 28	-217 ± 13
$X_1^R$	-2528 ± 260	-847 ± 36	-866 ± 81	153 ± 16