



# Politechnika Warszawska Wydział Fizyki

*Koszykowa 75, PL-00-662 Warsaw, Poland*  
Tel: (48) 22 6607267; fax: (48) 22 6282171; <http://www.if.pw.edu.pl>

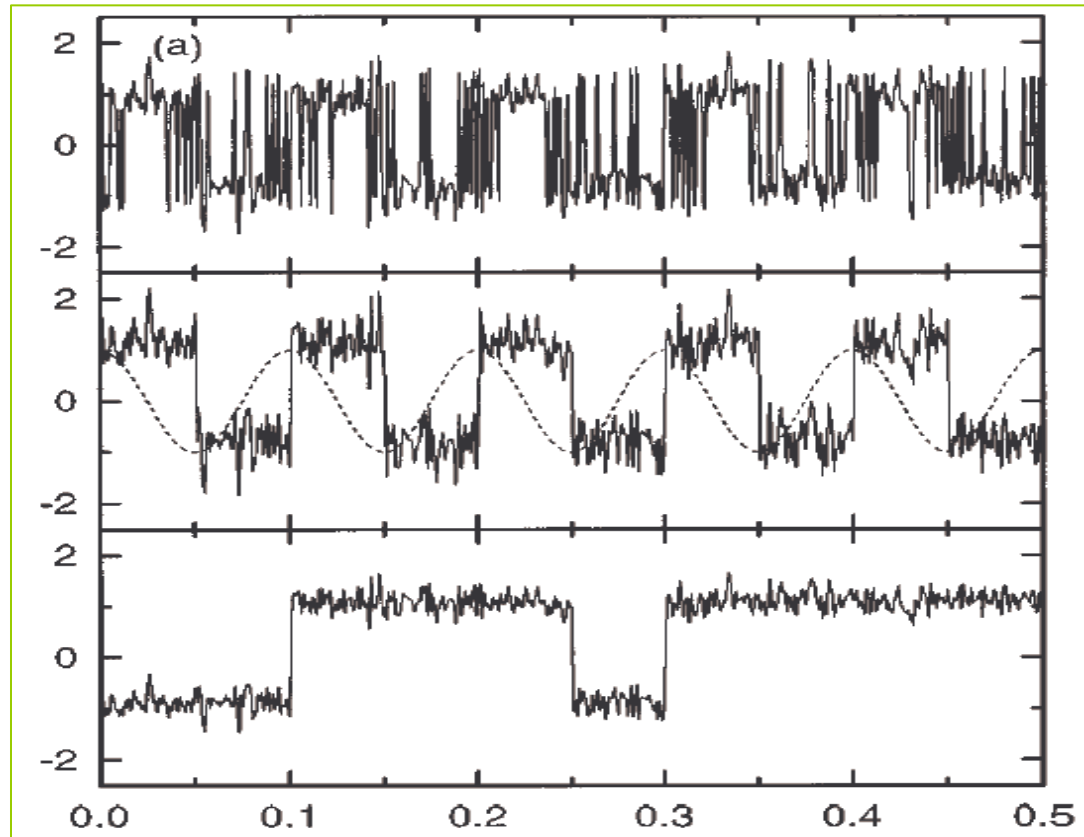
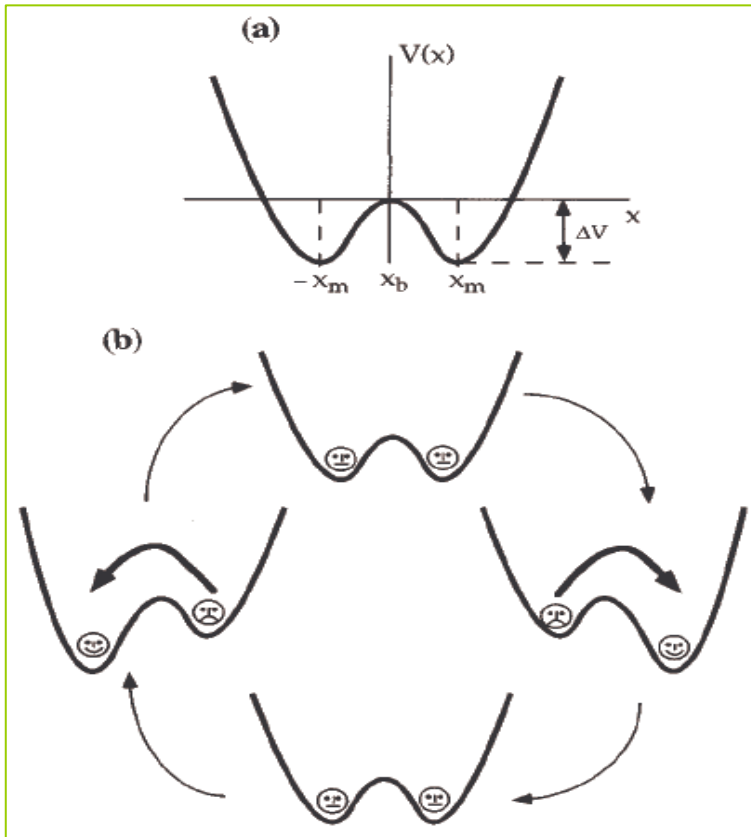


Marcin Kaim, Andrzej Krawiecki

## **Strukturalny multirezonans stochastyczny w układach o strukturze sieci hierarchicznych**

*Fizyka w Ekonomii i Naukach Społecznych, Warszawa 2010*

# Rezonans stochastyczny



$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx} + A \sin \omega_s t + \xi(t)$$

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$$

Zjawisko, polegające na maksymalizacji odpowiedzi układu (zwykle nieliniowego) na pobudzenie periodyczne przez dodanie szumu stochastycznego na wejściu.

Przykład: cząstka przetłumiona w pobudzonym okresowo potencjale bistabilnym.

# Charakteryzacja rezonansu stochastycznego

Sygnał wyjściowy

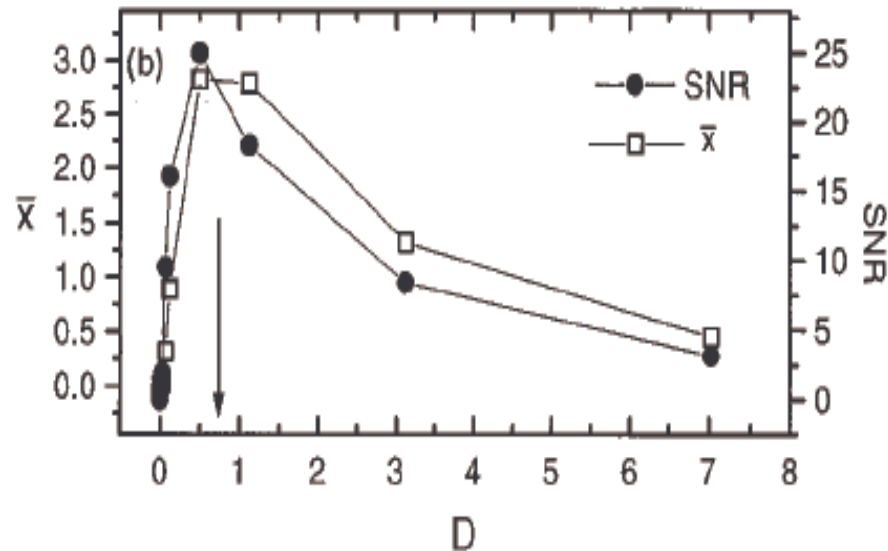
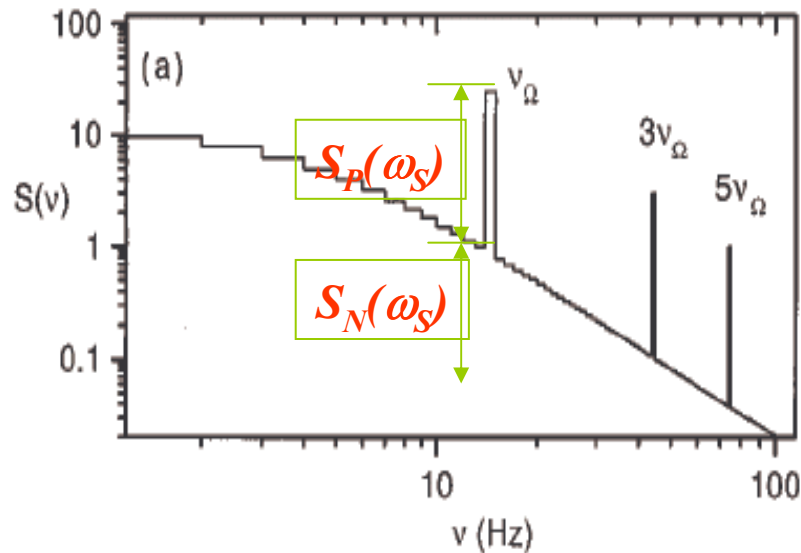
$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x(t) < 0 \\ +1 & \text{dla } x(t) > 0 \end{cases}$$

Charakterystyki:

- Stosunek sygnału do szumu SNR
- Wzmocnienie sygnału SPA

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{S_P(\omega_S)}{S_N(\omega_S)}$$

$$\text{SPA} = \frac{S_P(\omega_S)}{A^2}$$



Rezonans stochastyczny występuje m.in. w układzie progowym z czasem dyskretnym

$$y_{t+1} = \Theta \left[ A \sin(\omega_s t) + \eta_t - b \right]$$
$$\Theta(x) = 1 \text{ dla } x > 0, \Theta(x) = 0 \text{ dla } x \leq 0,$$
$$\langle \eta_n \eta_m \rangle = 2D^2 \delta_{n,m}, A < b$$

### Wzmocnienie rezonansu stochastycznego w sieciach

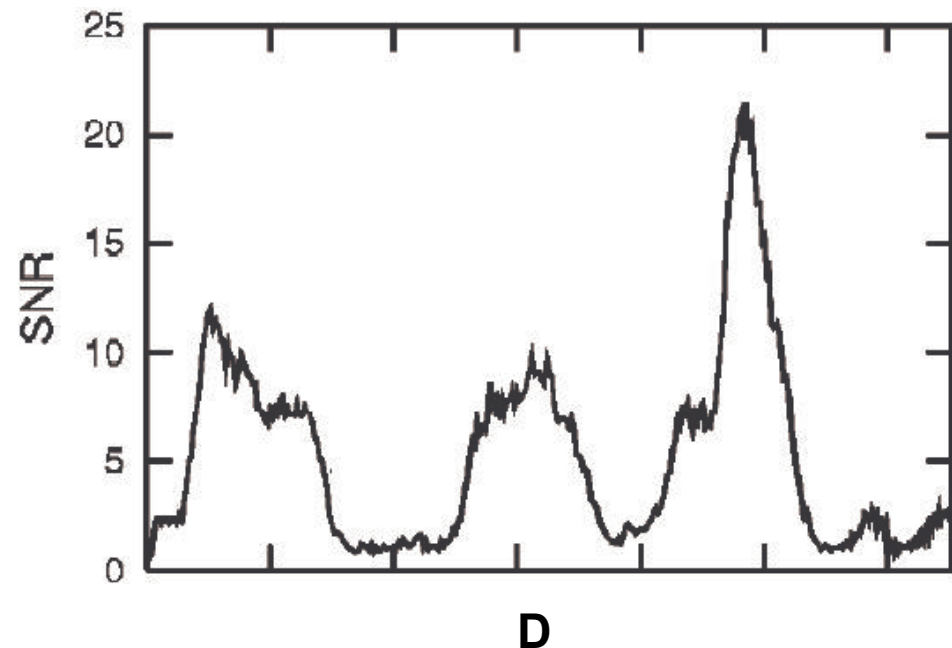
W układach o strukturze sieci, złożonych z oddziałujących elementów, SNR z sygnału wyjściowego każdego z elementów składowych zwykle wzrasta w porównaniu z przypadkiem bez sprzężenia [J.F. Lindner et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3 (1995)].

### Multirezonans stochastyczny

SNR ma więcej niż jedno maksimum w funkcji natężenia szumu [J.M.G. Vilar, J.M. Rubi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2882 (1997); *Physica A* **264**, 1 (1999)].

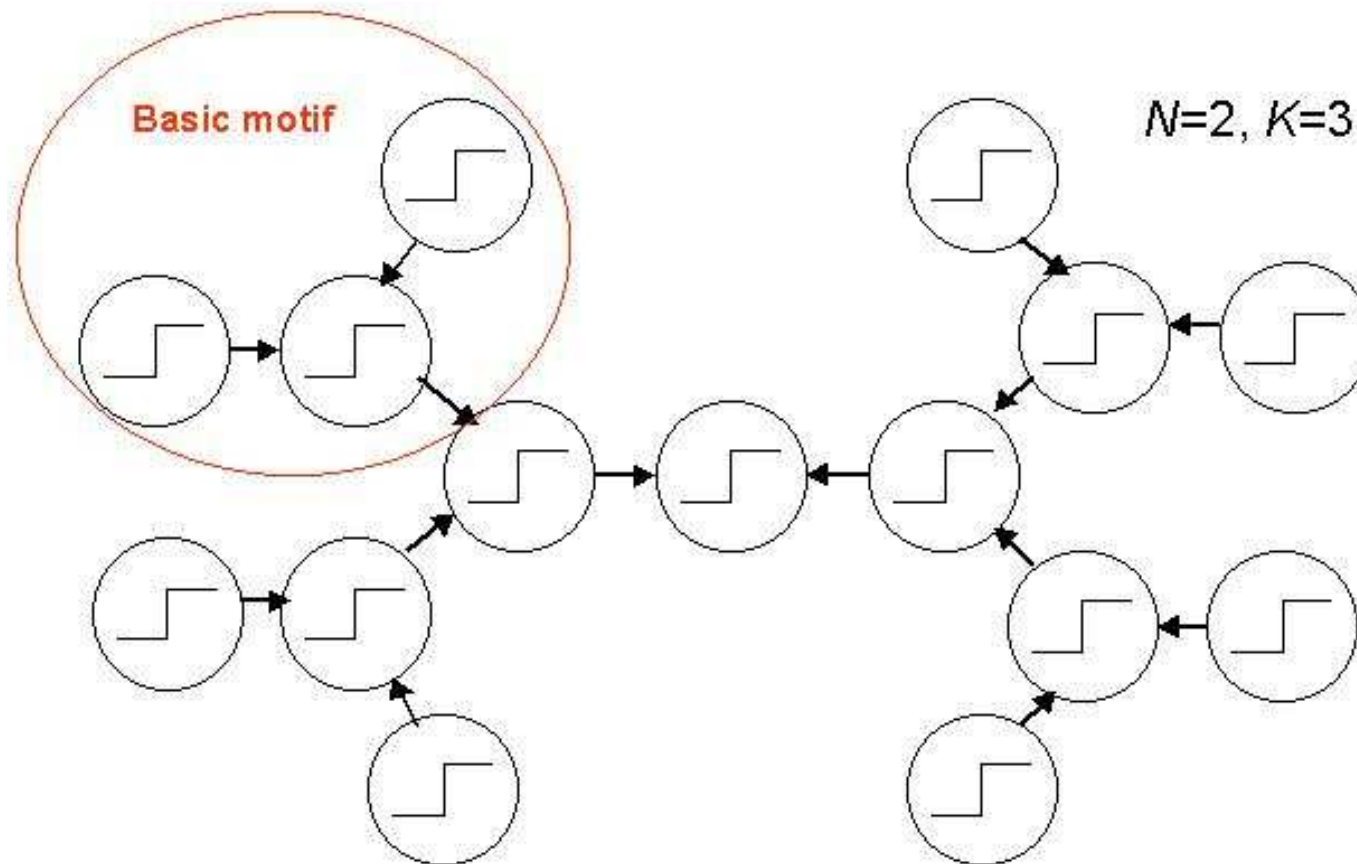
### Strukturalny multirezonans stochastyczny

Wielokrotne maksima SNR w układzie złożonym pojawiają się wskutek odpowiedniej struktury oddziaływań w układzie [A. Krawiecki, *Eur. Phys. J B* **69**, 81 (2009)].



## Sieci hierarchiczne

- Można je zdefiniować jako sieci złożone z powtarzalnych grup elementów („motywów”), w których gęstość i/lub kierunek połączeń wskazuje na podporządkowanie jednych motywów innym,
- Występują powszechnie m.in. w sieciach społecznych (hierarchiczna struktura zarządzania lub struktura społeczna).



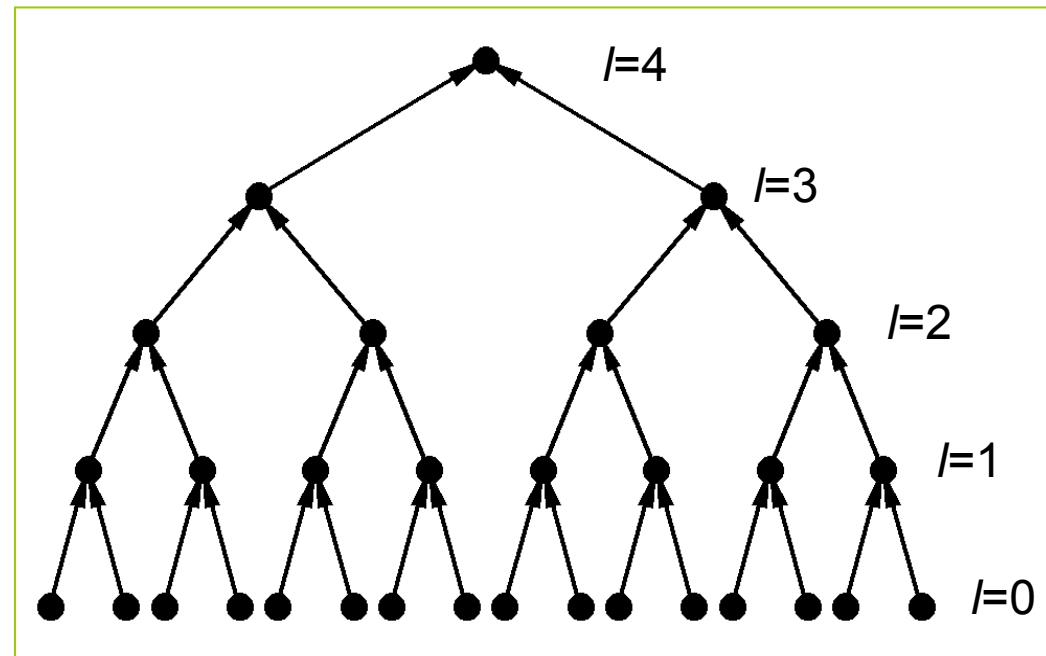
# Prosty model

## Sieć hierarchiczna (graf skierowany) o strukturze drzewa

- Sieć składa się z  $l = 0, 1, 2, \dots, r$  warstw węzłów,
- W każdym węźle znajduje się element progowy (sztuczny neuron) z progiem  $b$ ,
- Węzły połączone są w ten sposób, że każdy węzeł w warstwie  $l$  ma  $n$  wchodzących (od węzłów w warstwie  $l-1$ ) i jedno wychodzące (do węzła w warstwie  $l+1$ ) skierowane połączenie,
- Każde skierowane połączenie odpowiada oddziaływaniu o wadze  $w$  między elementami progowymi w połączonych węzłach, w formie typowej dla sieci neuronowych,
- Czas jest dyskretny,  $t = 0, 1, 2, \dots$
- Elementy progowe w węzłach pobudzone są wspólnym sygnałem periodycznym o amplitudzie  $A$ , częstości  $\omega_s$ , i nieskorelowanymi białymi szumami Gaussowskimi o natężeniu  $D$ .

[M. Kaim, A. Krawiecki, *Phys. Lett.*  
**A374**, 4814 (2010)].

Sieć hierarchiczna o strukturze drzewa z  $n=2$ ,  $r=4$ , strzałki odpowiadają skierowanym połączeniom (oddziaływaniom).



Stan wyjściowy elementu progowego  $y_l^{(i)}$  w węźle  $i$ , należącym do warstwy  $l$ , w chwili  $t$  określony jest równaniem

$$y_0^{(i)}(t) = \Theta \left[ A \sin \omega_s t + D \eta_0^{(i)}(t) - b \right], \quad i = 1, 2, \dots, n^r$$

$$y_l^{(i)}(t) = \Theta \left[ A \sin \omega_s t + D \eta_l^{(i)}(t) + \frac{w}{n} \sum_{j=1}^n y_{l-1}^{(n^{(i-1)}+j)}(t-1) - b \right], \quad l = 1, 2, \dots, r; i = 1, 2, \dots, n^{r-l}$$

$$\langle \eta_k^{(i)} \eta_l^{(j)} \rangle = \delta_{k,l} \delta_{i,j}; \quad \Theta(\cdot) - \text{funkcja Heaviside'a}$$

Prawdopodobieństwo pobudzenia  $P_l(t)$  dowolnego elementu w warstwie  $l$  w chwili  $t$

$$P_0(t) = \Pr \left[ A \sin \omega_s t + D \eta(t) - b > 0 \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{1}{\sqrt{2D}} (b - A \sin \omega_s t) \right]$$

$$P_l(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Pi_k(t) P_{l-1}^k(t-1) [1 - P_{l-1}(t-1)]^{n-k}, \quad l = 1, 2, \dots, r$$

gdzie  $\Pi_k(t)$  - prawdopodobieństwo warunkowe, że  $y_l^{(i)} = 1$  pod warunkiem, że  $k$  spośród  $n$  elementów dołączonych do badanego elementu jest wzbudzonych w chwili  $t-1$

$$\Pi_k(t) = \Pr \left[ A \sin \omega_s t + D \eta(t) + w \frac{k}{n} - b > 0 \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{1}{\sqrt{2D}} \left( b - A \sin \omega_s t - w \frac{k}{n} \right) \right]$$

SNR dla elementu w warstwie  $l$

[F. Chapeau-Blondeau, *Phys. Rev. E* **53**, 5469 (1996)]

$$\text{SNR} = \frac{|\hat{P}_l(\omega_s)|^2}{\langle P_l(t) \rangle - \langle P_l^2(t) \rangle}, \quad \hat{P}_l(\omega) = T_s^{-1} \sum_{t=1}^{T_s} P_l(t) \exp(i\omega t)$$

## Strukturalny multirezonans stochastyczny.

Pokazano SNR z sygnałów wyjściowych elementów progowych w kolejnych warstwach,

$w=0.07$ ,

$T_s=1024$ ,

$b=1$ ,

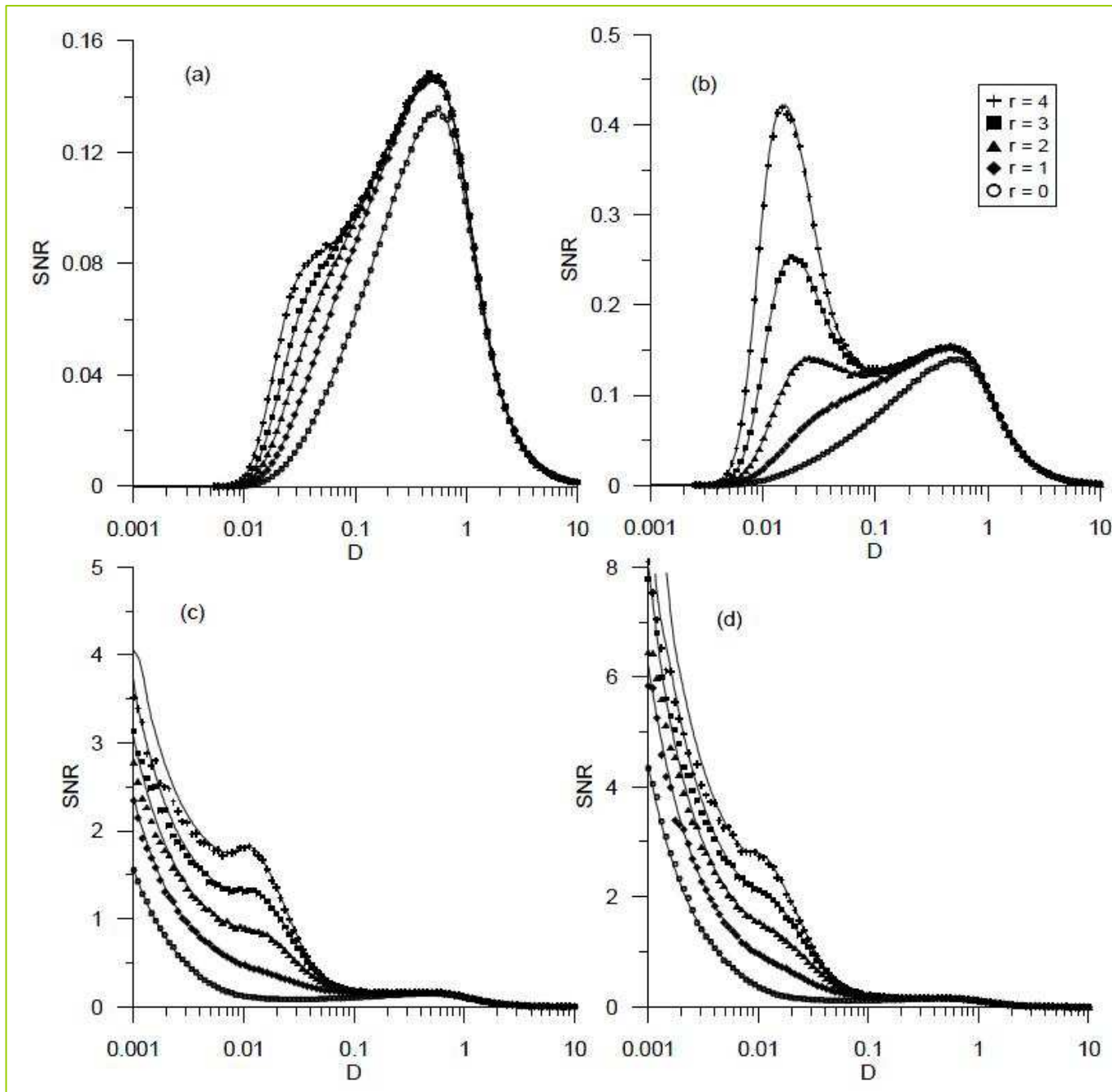
$n=2$

(a)  $A=0.97$ ,

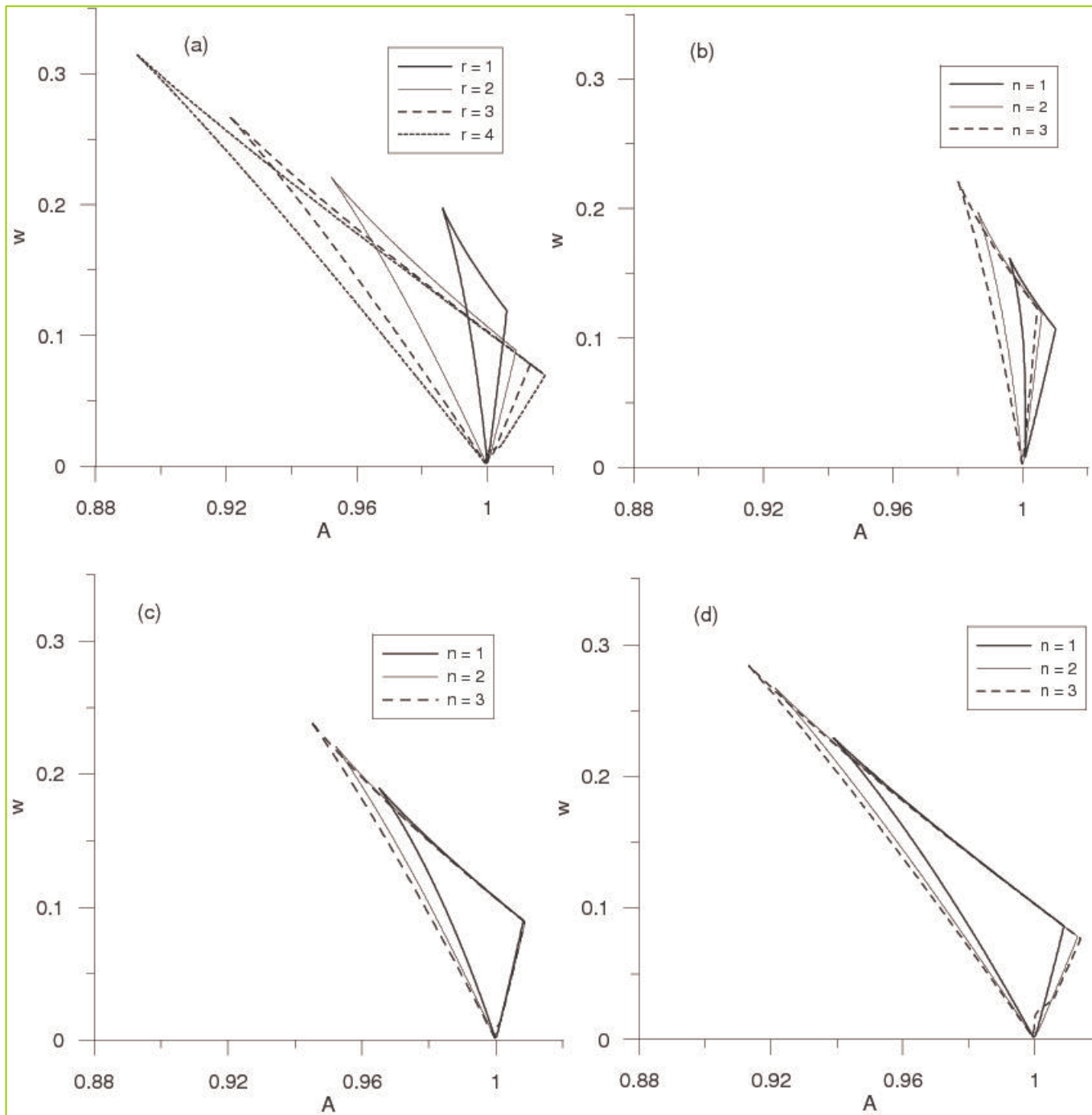
(b)  $A=0.99$ ,

(c)  $A=1.01$ ,

(d)  $A=1.02$ .







Zakres parametrów,  
dla których występują  
podwójne maksima  
SNR w sygnale  
wyjściowym elementu  
z najwyższej ( $l=r$ )  
warstwy sieci,

$$T_s=1024,$$

$$b=1,$$

$$(a) n=2,$$

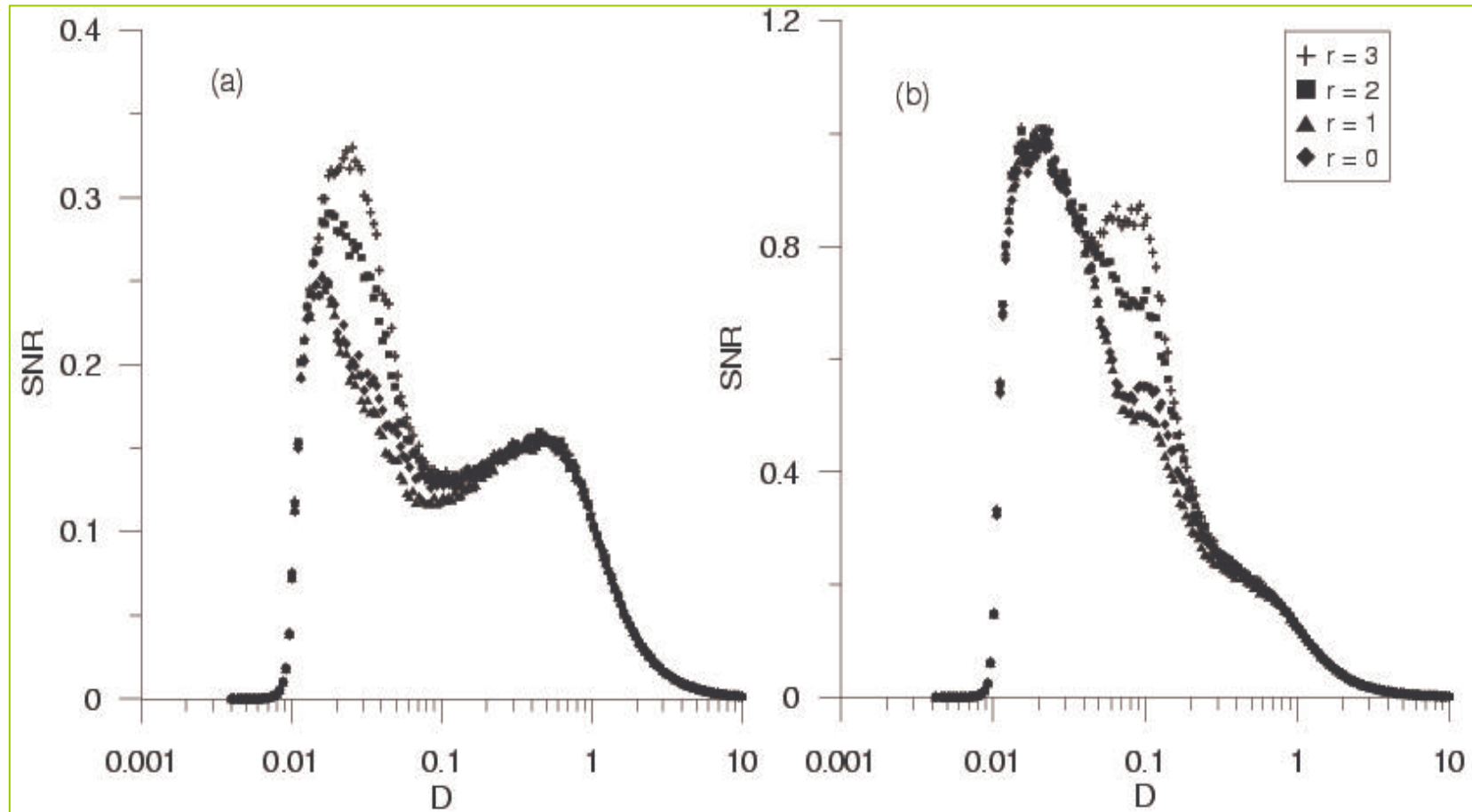
$$(b) r=1,$$

$$(c) r=2,$$

$$(d) r=3.$$

## Sieć hierarchiczna o strukturze drzewa, elementy wzajemnie połączone (oddziaływania symetryczne)

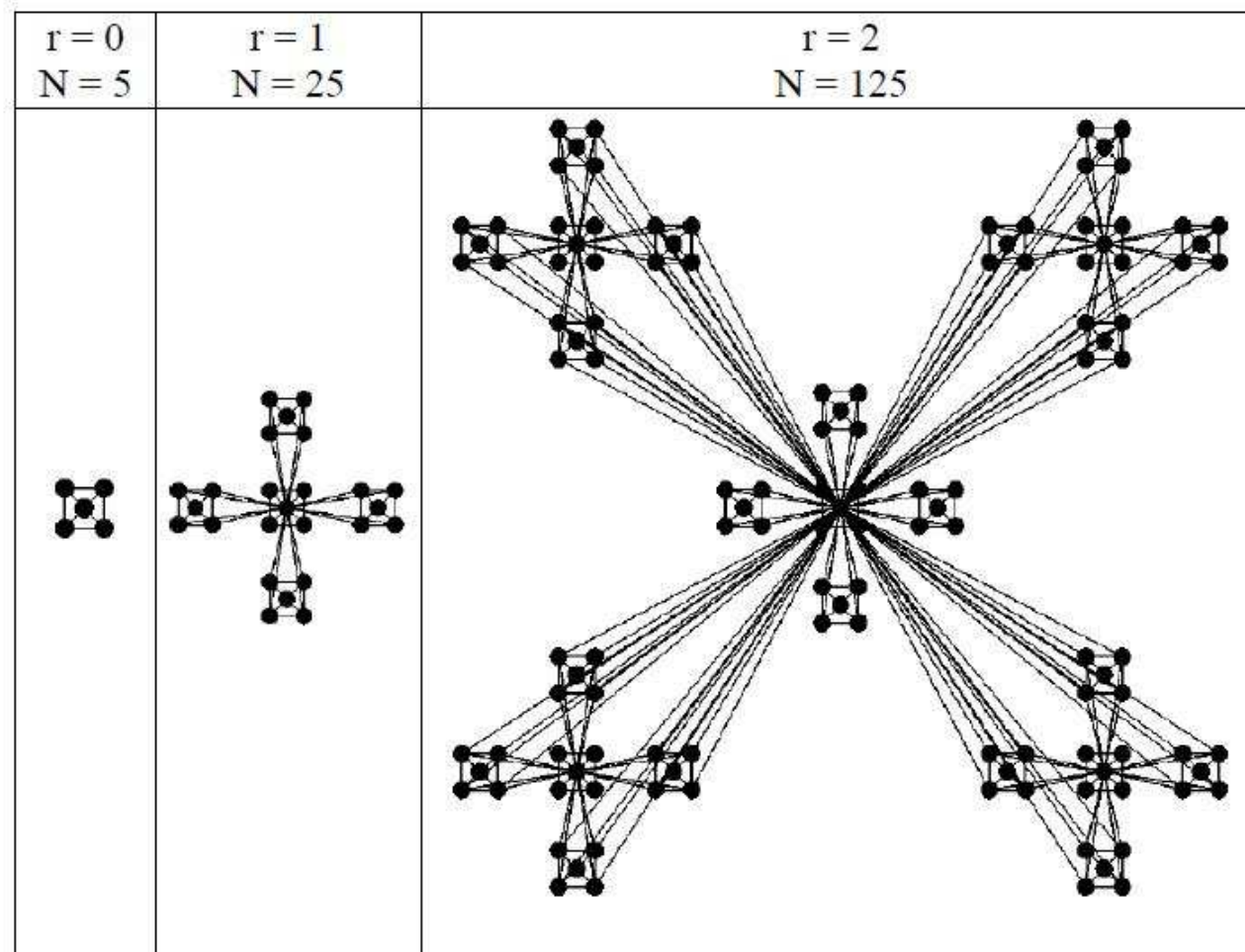
Jak w poprzednim przykładzie, z tym że krawędzie odpowiadają dwustronnym i symetrycznym oddziaływaniom pomiędzy elementami progowymi w węzłach

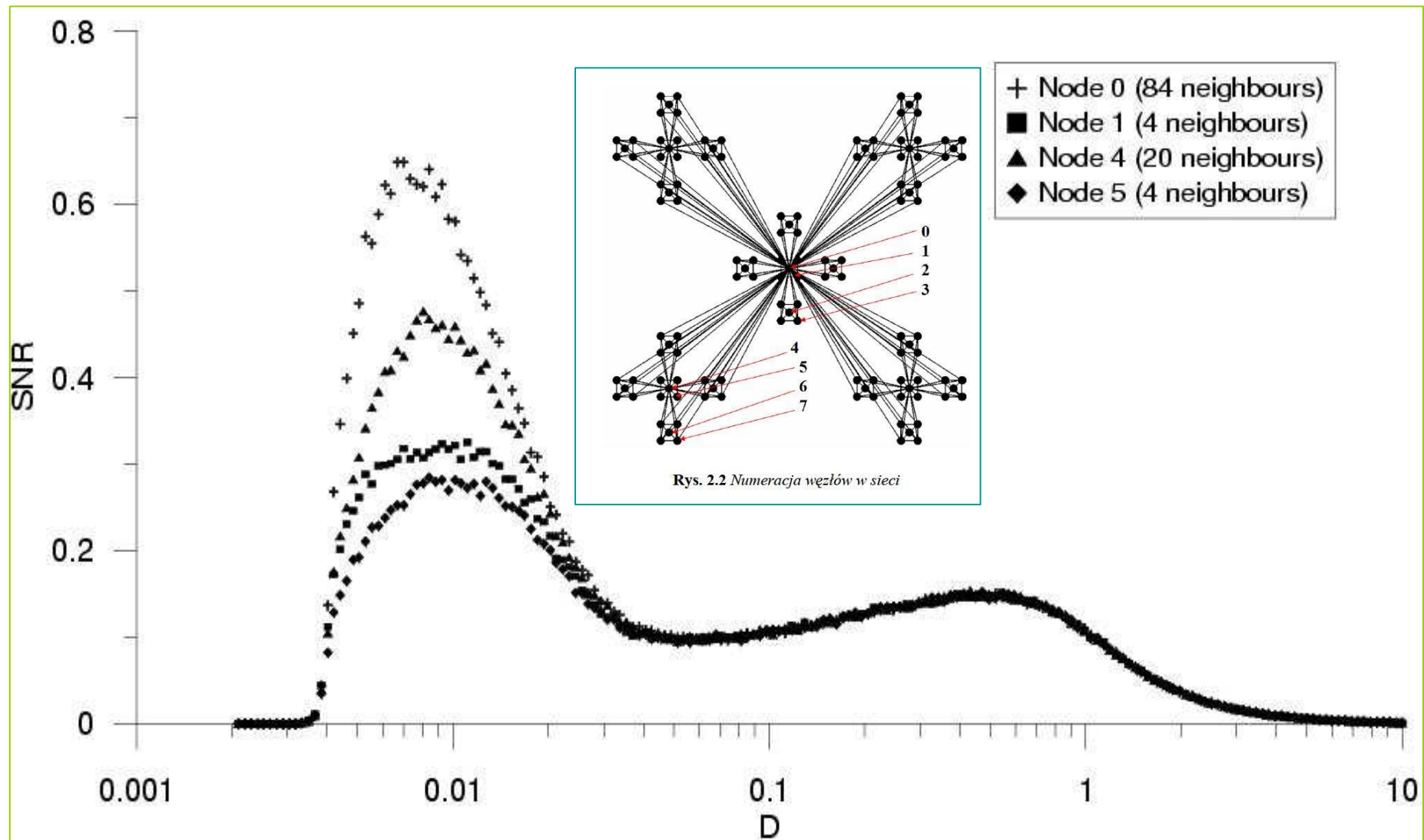


Pokazano SNR z sygnałów wyjściowych elementów progowych w kolejnych warstwach,  $n=2$ ,  $T_s=1024$ ,  $b=1$ ,  $A=0.98$ ,  $b=1$ , (a)  $w=0.1$ , (b)  $w=0.3$  (wyniki numeryczne).

## Sieć Ravasz-Barábasi

- Przedstawiono pierwsze trzy kroki konstrukcji [E. Ravasz, A.L. Barabási, *Phys Rev E* **67**, 026112 (2003)],
- W węzłach umieszczono elementy progowe, krawędzie odpowiadają dwustronnym i symetrycznym oddziaływaniom pomiędzy elementami w węzłach.





Strukturalny multirezonans stochastyczny w sieci Ravasz-Barábasi wzajemnie oddziałujących elementów progowych (wyniki numeryczne). Pokazano SNR z sygnału wyjściowego wybranych elementów progowych (por. wstawiony schemat numeracji węzłów). Parametry:  $w=0.05$ ,  $T_s=1024$ ,  $b=1$ ,  $r=2$ ,  $A=0.99$ .

## Wnioski

- Strukturalny multirezonans stochastyczny w układach elementów progowych o strukturze sieci hierarchicznych pojawia się przy małych natężeniach szumu i amplitudach sygnału periodycznego bliskich wartości progowej,
- Pojawienie się dodatkowego maksimum SNR przy małych wartościach szumu jest wynikiem nałożenia sygnału periodycznego i uśrednionego sygnału, pochodzącego od elementów stojących niżej w hierarchii, co prowadzi do wzmocnienia składowej periodycznej sygnału wyjściowego elementów stojących wyżej w hierarchii,
- Otrzymane wyniki wskazują, że strukturalny multirezonans stochastyczny może być powszechnym zjawiskiem w układach o strukturze sieci hierarchicznych,
- Pojawienie się dominującego maksimum SNR przy małych wartościach szumu może ułatwiać wykrywanie podprogowych sygnałów niosących informację przez elementy, stojące wyżej w hierarchii, w środowisku, w którym występuje słaby szum.