PRZYCZYNOWOŚĆ W MATEMATYCE FINANSOWEJ I JEJ KONSEKWENCJE

Andrzej Karpio
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
andrzej_karpio@sggw.pl

Prezentowana praca korzysta z formalizmu matematycznego, który został wypracowany przez fizyków. Jego zaletą jest duży stopień ogólności, bardziej „przystający" do rzeczywistości niż funkcje ciągłe nawet różniczkowalne, jak się często zakłada w rozważaniach teoretycznych. Rzeczywistość nie wymaga tak silnych założeń, jest bardziej złożona. Dlatego dystrybucje bardzo dobrze opisują procesy fizyczne (i nie tylko) i w niniejszej pracy zastosowano je do matematyki finansowej, wraz z interpretacją otrzymanych związków.

Podstawą rozważań jest równanie opisujące zmianę kapitału w czasie

$$\frac{dk(\tau)}{d\tau} = r(\tau)k(\tau) + h(\tau)$$

Gdzie:
k– kapitał
r – chwilowa stopa procentowa
h – strumień wpłat (wypłat)
rk - strumień odsetek
pochodna kapitału – strumień kapitału

Poszukiwanie rozwiązań w klasie funkcji różniczkowalnych prowadzi do mało interesujących rozwiązań, przynajmniej z praktycznego punktu widzenia. W rzeczywistych procesach inwestycyjnych mamy do czynienia z nieciągłymi wpłatami h, a nawet nieróżniczkowalnymi. Wymusza to poszukiwania rozwiązań w klasie obiektów innych niż funkcje. Stąd pojawia się koncepcja traktowania równania jako równania dystrybucyjnego. Jednak pewnym mankamentem jest fakt, że nie ma dobrze określonego iloczynu dystrybucji, dlatego stopa zmian musi być funkcją gładką, odstępstwo od tego założenia może pojawić się jedynie w konkretnym przypadku rozwiązania.

Rozważmy przestrzeń funkcji φ określonych na $\mathbb{R}$ klasy C^∞ mających zwarty nośnik $\mathrm{supp}\varphi$, tzn. domknięcie zbioru $\{\tau \in \mathbb{R}: \varphi(\tau) = 0\}$ jest ograniczone i domknięte. Zbieżność określamy następująco. Ciąg φ_n zbiega do φ jeśli:

1. Istniej taka liczba rzeczywista R, że dla wszystkich k zachodzi: $supp\varphi_k \subset K(0,R)$, gdzie $K(0,R)$ jest kulą otwartą o środku w zerze;
2. Ciąg pochodnych $\frac{d^j\varphi_n}{d\tau^j}$ zbiega jednostajnie do $\frac{d^j\varphi}{d\tau^j}$ dla dowolnego j.

Rozważana przestrzeń liniowa funkcji wraz z powyżej określoną zbieżnością nazywa się przestrzenią funkcji próbnych o zwartym nośniku i oznacza się symbolem $D(\mathbb{R})$. Zdefiniowana przestrzeń odgrywa rolę analogiczną do dziedziny funkcji. Przyjmujemy definicję: Przestrzenią dystrybucji $D'(\mathbb{R})$ nazywać będziemy przestrzeń wektorową funkcjonałów liniowych ciągłych określonych na $D(\mathbb{R})$.

W dalszej części pracy zajmiemy się dystrybucjami temperowanymi $S'(\mathbb{R})$, dla których przestrzenią funkcji próbnych jest przestrzeń Schwartza $S(\mathbb{R})$, której elementami są funkcje gładkie dążące do zera przy $|\tau| \to \infty$ szybciej od dowolnej potęgi $|\tau|^{-1}$. Wiadomo, że zachodzi inkluzja:

$$D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$$

zatem dla funkcjonałów liniowych ciągłych (przestrzenie dualne) spełniony jest warunek: $S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$. Widać więc, że początkowe rozważania dotyczą obiektów z przestrzeni „większej". Zmienna τ jest zmienną w przestrzeni funkcji próbnych.

Korzyści z rozważania równania dystrybucyjnego:

- Można opisać szeroką klasę różnych procesów kształtowania się kapitału w jednolity sposób, jednym formalizmem,
- Opisuje również nieciągłe, nieróżniczkowalne zmiany kapitału, a więc procesy bliższe rzeczywistości,
- Kapitał jest obiektem nielokalnym w czasie, podobnie jak dystrybucja, jego zmiana wymaga czasu,
- Istnieją elementarne przyczyny zmiany kapitału - inwestycje elementarna (rozwiązanie podstawowe),
- Kapitał kształtowany w dowolnym procesie daje się przedstawić w postaci superpozycji inwestycji elementarnych,
- Pojawia się przyczynowość mająca interpretację finansową,
- W naturalny sposób pojawia się transformata Laplace'a (wersja ciągła i dyskretna) wyrażająca kapitał kształtowany wpłatami zależnymi od czasu poprzez stopę wzrostu (procentową),
- Transformata Laplace'a zadaje związek pomiędzy ciągłym i dyskretnym opisem zmian kapitału (równania różniczkowe – równania różnicowe),

Rozwiązania podstawowe $G(\tau, \tau')$ spełniają równania

$$\frac{dG(\tau, \tau')}{d\tau} = r(\tau)G(\tau, \tau') \pm \delta(\tau - \tau')$$

gdzie δ jest deltą Diraca, a τ' spełnia rolę parametru. Znak plus minus dotyczy odpowiednio wpłaty i wypłaty jednostkowej.
Jeżeli potrafimy znaleźć rozwiązanie $G(\tau, \tau')$ to łatwo zauważyć, iż można do niego dodać dowolne rozwiązanie równania jednorodnego ($h = 0$) i suma też będzie spełniała równanie Własność ta pozwala znajdować rozwiązania podstawowe spełniające zadane z góry warunki początkowe, wtedy zwykło się nazywać rozwiązania podstawowe funkcjami Greene'a.

Jeżeli znamy $G(\tau, \tau')$, to ogólnym rozwiązaniem wyjściowego równania jest:

$$k(\tau) = k_J(\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau, \tau')h(\tau')d\tau'$$

Gdzie pod całką mamy do czynienia z iloczynem prostym dystrybucji. Składnik z całką opisuje szczególne rozwiązanie równania różniczkowego i ono będzie przedmiotem dalszej analizy. Jego interpretacja inwestycyjna jest następująca:

Kapitał $k(\tau)$ zadany w chwili τ jest superpozycją infinitezymalnych wpłat o wartości $h(\tau')d\tau'$ dokonywanych w chwilach τ', każda z nich wnosi przyczynek do kapitał $k(\tau)$ z „wagą" $G(\tau, \tau')$, która wyraża niejednakowe wkłady, jakie na kapitał wywierają wpłaty dokonywane w różnych chwilach czasu.

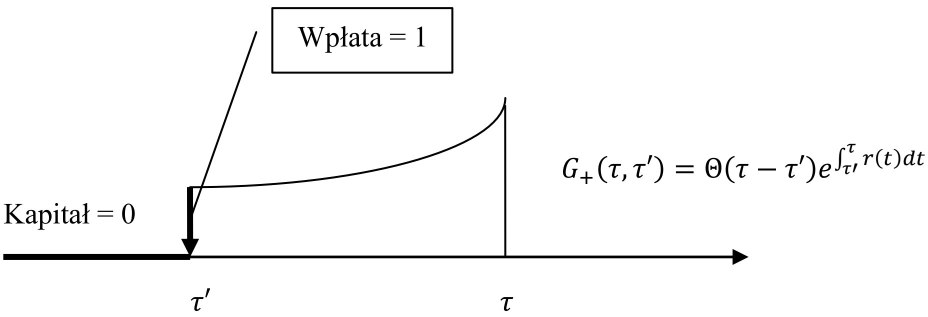
Nakładając różne warunki na funkcję $G(\tau, \tau')$ znajdujemy rozwiązania opisujące różne procesy kształtujące kapitał. Przyczynowość pojawia się, gdy zażądamy określonej relacji pomiędzy chwilami wpłat τ' i chwilami, w których wyznaczamy kapitał, May dwie możliwości:

Wpłaty/wypłaty są wcześniejsze w stosunku do momentu wyznaczania kapitału – przyszła wartość,

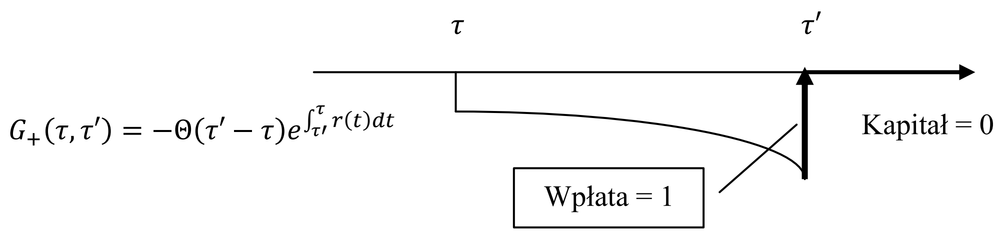
Wpłaty/wypłaty są późniejsze w stosunku do momentu wyznaczania wartości kapitału – wartość bieżąca (dyskontowanie).

W konsekwencji otrzymujemy cztery rozwiązania podstawowe dla jednostkowych wpłat i wypłat – rozwiązania opóźnione (fiz.: retardowane) i przedwczesne (fiz.: adwansowane), a mianowicie:

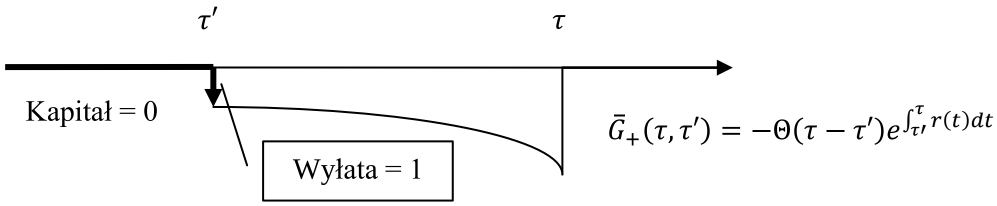
Rozwiązanie opóźnione wpłat – przyszła wartość jednostkowej wpłaty



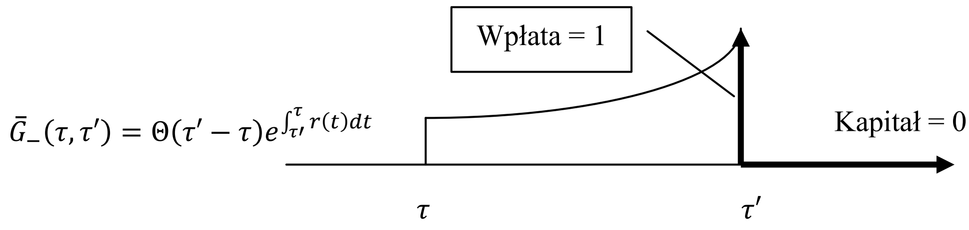
Rozwiązanie przedwczesne wpłat – bieżąca wartość przyszłego debetu pokrytego jednostkową wpłatą



Rozwiązania opóźnione wypłat – przyszła wartość jednostkowego debetu



Rozwiązanie przedwczesne wypłat – bieżąca wartość przyszłej jednostkowej wypłaty



Z matematycznego punktu widzenia otrzymane rozwiązania mają prostą symetrię „odziedziczoną" z równania i wynikającą z interpretacji wypłaty, jako ujemnej wpłaty. Nie mniej jednak z interpretacyjnego punktu widzenia należy rozpatrywać je oddzielnie gdyż mają zupełnie inne znaczenie finansowe – debet i lokata inaczej kształtują stan inwestycji (rachunku).
Rozważmy rozwiązania dla wpłat, wówczas łatwo pokazać, że kombinacja liniowa rozwiązań podstawowych G_+ i G_- w postaci:

$$G_c(\tau,\tau') = cG_+(\tau,\tau') + (1-c)G_-(\tau,\tau')$$

Spełnia równanie dla jednostkowej wpłaty dokonanej w chwili τ', co oznacza, że wartość kapitału w chwili τ jest kombinacją liniową rozwiązań opisujących lokaty G_+ i debety G_-. Wartość współczynnika c może być dowolna, nie koniecznie dodatnia.
Można zauważyć, że dystrybucja:

$$G_J(\tau,\tau') = G_+(\tau,\tau') - G_-(\tau,\tau')$$

Spełnia równanie jednorodne opisujące stan rachunku na którym w chwili τ' dokonano dwóch równoczesnych operacji: wpłaty jednostkowej $G_+(\tau,\tau')$ i jednostkowej wypłaty $-G_-(\tau,\tau')$, dlatego spełnia ono równanie w którym nie ma zewnętrznych czynników kształtujących kapitał, zmienia się on jedynie pod wpływem stopy zmian $r(\tau)$, będącą czynnikiem wewnętrznym związanym z dynamiką kształtowania się kapitału. Rozwiązanie podstawowe G_c można zapisać w postaci:

$$G_c(\tau,\tau') = G_-(\tau,\tau') + c\big(G_+(\tau,\tau') - G_-(\tau,\tau')\big)$$

lub

$$G_c(\tau,\tau') = G_+(\tau,\tau') + (c-1)\big(G_+(\tau,\tau') - G_-(\tau,\tau')\big)$$

Wyrażają one sobą znaną własność, że do rozwiązania podstawowego można dodać rozwiązanie równania jednorodnego (wyrażenie w nawiasie), co pozawala spełnić zadane warunki początkowe. Powyższe przedstawienia „eksponują” rozwiązanie przedwczesne (pierwszy przypadek) lub opóźnione (drugi przypadek). Wyrażenie w nawiasie pomnożone przez stałą jest ogólnym rozwiązaniem równania jednorodnego. Analogiczny rozkład można zapisać dla funkcji Greene'a równania z wypłatami.

Zajmiemy się ilustracją zastosowania powyższego formalizmu wraz z interpretacją rozwiązań pojawiających się przy konkretnych wpłatach lub wypłatach $h(\tau)$, których nie można otrzymać rozważając równanie w klasie funkcji (różniczkowalnych). Ostateczne rozwiązanie zależy od postaci funkcyjnej stopy zmian $r(\tau)$, o której musimy założyć, że jest funkcją gładką, aby jej iloczyn $r(\tau)k(\tau)$ z dystrybucją $k(\tau)$ był dobrze określony. Poniższe przykłady będą dotyczyły rozwiązań zadawanych dystrybucjami: G_+ (przyszła wartość kapitału) i $\bar{G}_-$ (bieżąca wartość kapitału).

Przykład 1 (*Pojedyncze wpłaty*)
Rozważmy ciąg pojedynczych wpłat o wartościach k_i dokonywanych w chwilach t_i, strumień $h(\tau)$ ma wówczas postać:

$$h(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k_i \delta(\tau - t_i)$$

Można pokazać, że taki ciąg dystrybucji jest zbieżny w przestrzeni $D'(\mathbb{R})$, co jest konsekwencją faktu, że funkcje próbne mają zwarty nośnik.
Ponieważ rozwiązania podstawowe spełniają równanie z pojedynczą deltą Diraca, a samo równanie jest liniowe, zatem szczególne rozwiązania generowane funkcjami Greene'a możemy od razu zapisać, w szczególności otrzymujemy:

$$k_+(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k_i \Theta(\tau - t_i) e^{\int_{t_i}^{\tau} r(t)dt}$$

Ze względu na wartości funkcji Heaviside'a suma „wybiera” tylko chwile czasu t_i wcześniejsze od τ, tylko one mają wpływ na przyszłą wartość kapitału.
Natomiast rozwiązanie zadawane funkcją $\bar{G}_-$ (dyskontowanie) będzie miało postać:

$$\bar{k}_-(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k_i \Theta(t_i - \tau) e^{\int_{t_i}^{\tau} r(t)dt}$$

Tym razem na wartość kapitału w chwili τ mają wpływ jedynie chwile t_i późniejsze od τ, gdyż one decydują o wartości zdyskontowanej.

Rozważymy teraz przypadek wzrostu wykładniczego: $r(t) = r = const$, wówczas rozwiązanie $\bar{k}_-$ można zapisać w postaci:

$$\bar{k}_-(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k_i \Theta(t_i - \tau) e^{-r(t_i - \tau)}$$

Jest to dyskretna transformata Laplace'a z przesuniętym argumentem, w szczególności, gdy dyskontujemy na chwilę początkową otrzymujemy standardową postać transformaty. Z punktu widzenia matematyki finansowej otrzymaliśmy zdyskontowaną na chwilę τ sumę wpłat przy kapitalizacji ciągłej i chwilowej stopie procentowej r.

Inny przykład otrzymamy przyjmując następującą postać stopy zmian: $r(\tau) = \Theta\left(\tau + \frac{1}{r}\right)\frac{r}{1+r\tau}$. Wówczas, przy $t_i > \tau > -\frac{1}{r}$, rozwiązanie $\bar{k}_-$ jest następujące:

$$\bar{k}_-(\tau) = (1 + r\tau)\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i\Theta(t_i - \tau)}{1 + rt_i}$$

Co jest wzorem na bieżącą wartość (aktualizacja na chwilę τ) przyszłych wpłat przy oprocentowaniu prostym.

Przykład 2 (*Związek pomiędzy kapitalizacją ciągłą i dyskretną*)
Rozważmy teraz przestrzeń dystrybucji temperowanych $S'(\mathbb{R})$ i jej elementy zadawane funkcjami postaci $H_{\Delta t}^{(n)}(\tau' - t_0)$ (dystrybucje regularne) z wyróżnioną chwilą t_0 sugerującą chwilę, na którą następuje dyskontowanie:

$$H_{\Delta t}^{(n)}(\tau' - t_0) = \frac{1}{\Delta t}\frac{\Theta(\tau - t_0)}{(n-1)!}\left(\frac{\tau - t_0}{\Delta t}\right)^{n-1} e^{-\frac{\tau - t_0}{\Delta t}}$$

Biorąc pod uwagę rozwiązania zadawane funkcją Greene'a $\bar{G}_-(t_0, \tau')$, znajdujemy, przy stałej stopie zmian $r(\tau) = r = const$:

$$\hat{H}_{\Delta t}^{(n)}(t_0) = \frac{1}{(1 + r\Delta t)^n}$$

Funkcje $H_{\Delta t}^{(n)}(\tau' - t_0)$ nazywać będziemy czasowymi funkcjami dyskontowymi, a funkcje $\hat{H}_{\Delta t}^{(n)}(t_0)$ procentowymi. Zauważmy, że te drugie nie zależą od chwili t_0 na którą dokonujemy dyskontowania. Jest to zrozumiałe z inwestycyjnego punktu widzenia – nieskończony strumień wpłat nie zależy od chwili na którą dokonujemy dyskontowania.
Istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność pomiędzy czasowymi funkcjami dyskontowymi i procentowymi. Mianowicie, w pierwszym przypadku iloczynem jest splot, a w drugim zwykłe mnożenie – co jest własnością transformaty Laplace'a, mamy więc:

$$H_{\Delta t}^{(n)} * H_{\Delta t}^{(k)} = \frac{1}{\Delta t}H_{\Delta t}^{(n+k)}$$

Czemu odpowiada:

$$\hat{H}_{\Delta t}^{(n)} * \hat{H}_{\Delta t}^{(k)} = \hat{H}_{\Delta t}^{(n+k)}$$

Wiedząc, że delta Diraca jest jedynką splotu i obliczając pochodne czasowych funkcji dyskontowych można rozszerzyć ich definicję na ujemne wartości parametru n, co prowadzi do zależności:

$$H_{\Delta t}^{(-n)}(\tau) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(\Delta t)^m\delta^{(m)}(\tau - t_0)$$

Procentowe funkcje dyskontowe mają wówczas postać:

$$\hat{H}_{\Delta t}^{(-n)}(t_0) = (1 + r\Delta t)^n$$

Procentowe funkcje dyskontowe pojawiają się w standardowych metodach wyceny kapitału stosowanych w matematyce finansowej. Poprzez powyższą odpowiedniość można je jednoznacznie odwzorować na funkcje czasowe, co zadaje zależność pomiędzy standardowymi metodami „dyskretnej” wyceny kapitału, a metodami ciągłymi (tzn. zależnymi od ciągłego parametru). Rozstrzyga to znany dylemat pomiędzy obu metodami – obie są równoważne, każda z nich ma swoje plusy i minusy. W szczególności zamiast równań dystrybucyjnych, o których była dotychczas mowa można rozważać równania różnicowe:

$$\frac{\Delta k(t_{i-1})}{\Delta t_{i-1}} = rk(t_{i-1}) + h(t_{i-1})$$

W teorii równań różnicowych również istnieje metodologia ich rozwiązywania wykorzystująca funkcje Greene’a, mają one związek z wyżej rozważanymi procentowymi funkcjami dyskontowymi. W tym sensie istnieje jednoznaczna zależność pomiędzy „dyskretną” i „ciągłą” matematyką finansową.