

# Wpływ zdarzeń ekstremalnych i superekstremalnych na stochastyczną dynamikę szeregów czasowych

T.R. Werner<sup>1</sup> T. Gubiec<sup>2</sup> P. Kosewski<sup>2</sup> R. Kutner<sup>2</sup>  
D. Sornette<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki  
Uniwersytet Warszawski

<sup>2</sup>Institut Fizyki Doświadczalnej, Wydział Fizyki  
Uniwersytet Warszawski

<sup>3</sup>Department of Management, Technology, and Economics, ETH  
Zürich, Switzerland

5 Ogólnopolskie Sympozjum FENS, Warszawa 26.11.2010

Projekt częściowo finansowany przez Grant nr 119  
Pierwszego Konkursu na Projekty Badawcze  
Instytutu Ekonomicznego  
Narodowego Banku Polskiego

## Niektóre pozycje bibliograficzne



D. Sornette

*Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*  
Springer-Verlag, 2004.



D. Sornette

Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises  
*International Journal of Terraspace and Engineering*, 2(1), 1–17 (2009)



R. Kutner, F. Świtła

Stochastic simulations of time series within Weierstrass-Mandelbrot walks  
*Quant. Finance*, 3, 201–211 (2003).



R. Kutner, F. Świtła

Study of the non-linear autocorrelations within the Gaussian regime  
*EPJ*, B33, 495–503 (2003).



T. Gubiec, R. Kutner, T.R. Werner, D. Sornette

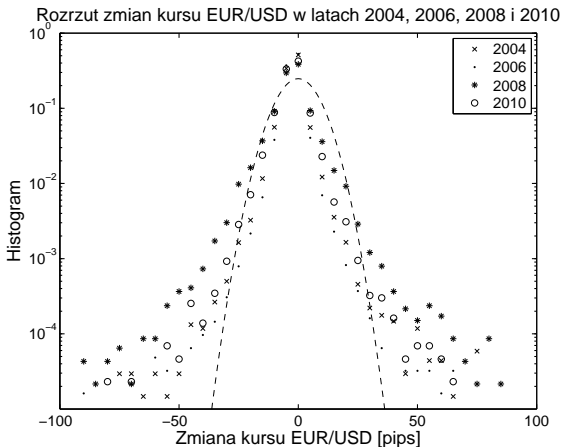
Super-extreme event's influence on a Weierstrass-Mandelbrot continuous-time random walk  
*Wysłane do druku w Physica A*.

## Plan

- 1 Procesy niegaussowskie
- 2 Zdarzenia superekstremalne
- 3 Metodologia
  - Funkcja autokorelacji prędkości
  - Model WM-CTRW
  - Własności asymptotyczne modelu WM-CTRW
- 4 Symulacje
  - Autokorelacje w obecności długotrwałych zdarzeń superekstremalnych
  - Superszoki
- 5 Podsumowanie i Zamierzenia

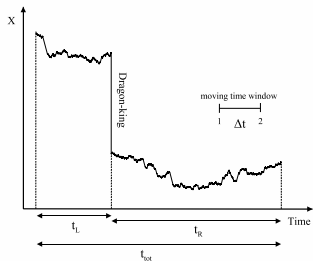
## Dane empiryczne - wpływ kryzysu na postać rozkładu

Przykład danych empirycznych ilustrujących wpływ kryzysu na kształt rozkładów statystycznych i ich odstępstwa od rozkładów gaussowskich.

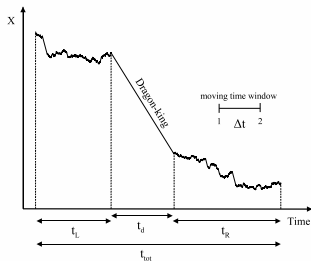


## Zdarzenia superekstremalne: dwa skrajne scenariusze

Schematyczny przebieg procesów ze zdarzeniami superekstremalnymi („smokami”) szokowymi i długotrwałymi



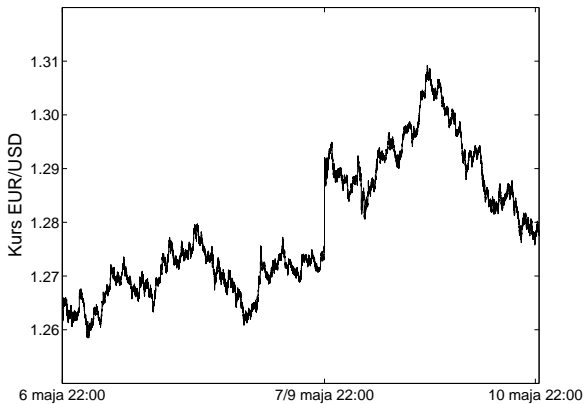
„Smok” szokowy



„Smok” długotrwały

## Dane empiryczne - superszoki

## Przykład danych empirycznych z superszokiem



Kurs EUR/USD z superszokiem z 10 maja 2010

## Dane empiryczne - długotrwałe zdarzenia superekstremalne

### Przykłady danych empirycznych z długotrwałymi zdarzeniami superekstremalnymi



Cena akcji BP



Cena złota



## Funkcja autokorelacji prędkości

Funkcja autokorelacji prędkości:

$$\begin{aligned} \text{VAF}(\Delta t) &= \langle v(t') v(t' + \Delta t) \rangle - \langle v(t') \rangle \langle v(t' + \Delta t) \rangle \\ &= \langle v_1 v_2 \rangle (\Delta t) - \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle = \begin{cases} C(\Delta t) & \text{bez „smoka”} \\ C_d(\Delta t) & \text{ze „smokiem”} \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie  $\langle \dots \rangle$  oznacza średniowanie po czasie  $t' \leq t_{\text{tot}} - \Delta t$  dla danej różnicy czasów (*lag*)  $\Delta t$ , a  $v(t') := [X(t') - X(t' - dt)]/dt$ . Dla kroku dyskretyzacji czasu zachodzi oczywiście  $dt \leq \Delta t$ ,  $t'$ .

## Rozkład w modelu WM-CTRW

Rozkład dla pojedynczego kroku w czasie i „przestrzeni”:

$$\psi(\Delta x, \Delta t) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} w(j) [\delta(\Delta x - v_0 v^j \Delta t) + \delta(\Delta x + v_0 v^j \Delta t)] \\ \times \frac{1}{\tau_0 \tau^j} \cdot \exp(-\Delta t / \tau_0 \tau^j)$$

gdzie wagi dla poszczególnych poziomów hierarchii wynoszą

$$w(j) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{N^j}, \quad N > 1, \quad j = 1, \dots$$

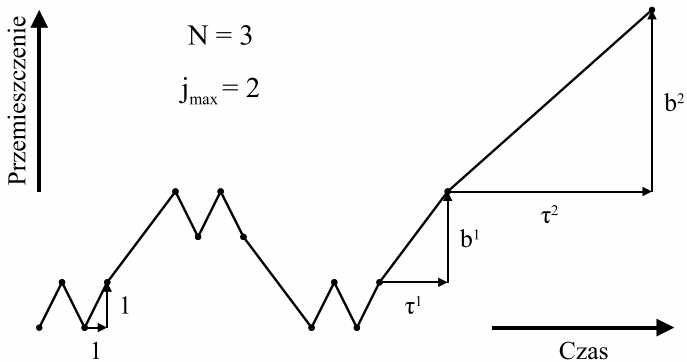
W naszych symulacjach przyjęliśmy

$$N = 4, \quad \tau_0 = v_0 = 1, \quad \tau = 2.52, \quad b = 2.5, \quad v = b/\tau = 0.99.$$

Poziom w hierarchii określa  $j$  — im ma większą wartość, tym mniejsze prawdopodobieństwo jego wystąpienia:  $w(j+1)/w(j) = 1/N$ .

## Hierarchia zdarzeń

Schematyczna ilustracja „spaceru” Weierstrassa  
ze zdarzeniami z różnych poziomów hierarchii



## Parametry asymptotyczne

Asymptotyczne własności procesu determinowane są parametrem  $\eta$ , zależącym z kolei od parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  (*temporal/spatial diffusion exponents*):

$$\alpha = \frac{\log N}{\log \tau} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{\log N}{\log b}$$

$\alpha$ i $\beta$	$\eta$
$\alpha > 1, \beta > 2$	1
$\alpha < 1, \beta > 2$	$\alpha$
$\alpha > 1, \beta < 2$	$1 - \alpha + \frac{2\alpha}{\beta}$
$\alpha < 1, \beta < 2$	$\frac{2\alpha}{\beta}$

(w naszych symulacjach:  $N = 4, b = 2.5, \tau = 2.52 \Rightarrow \eta \approx 1.48$ )

## Asymptotyka i funkcja autokorelacji

Asymptotyczne zachowanie wielkości  $\langle X^2(t) \rangle$  może być wyrażone przez parametr  $\eta$ :

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{2\mathcal{D}}{\Gamma(1 + \eta)} \times t^\eta$$

gdzie  $\mathcal{D}$  („fractional diffusion coefficient”) również zależy od  $\alpha$  i  $\beta$ . Dla  $\eta \neq 1$  proces jest „fraktalny”

$\eta < 1$  subdiffusion

$1 < \eta < 2$  **enhanced diffusion (superdiffusion)**

$2 < \eta < 3$  hyperdiffusion

Funkcja autokorelacji prędkości ma postać

$$C(t) = \langle v(t_0)v(t_0 + t) \rangle \approx \frac{2\mathcal{D}}{\Gamma(\eta - 1)} \frac{1}{t^{2-\eta}}$$

gdzie średniowanie jest po  $t_0$ . Tak więc na wykresie *log-log* powinniśmy otrzymać opadającą prostą

$$\log C(t) \sim (\eta - 2) \cdot \log t$$

z, w naszym przypadku, współczynnikiem kierunkowym  $\eta - 2 \approx -0.5$ .

## Funkcja autokorelacji w obecności długotrwałego zdarzenia superekstremalnego

Jeśli w czasie procesu wystąpiło pojedyncze długotrwałe zdarzenie ekstremalne o czasie trwania  $t_d$ , to jak można pokazać przy dość ogólnych założeniach otrzymuje się następujący wzór na funkcję autokorelacji

$$C_d(t) = \frac{1 - \gamma_d - 2t/t_{\text{tot}}}{1 - t/t_{\text{tot}}} C(t) + \left[ \frac{\gamma_d}{1 - t/t_{\text{tot}}} \left( 1 - \frac{\gamma_d}{1 - t/t_{\text{tot}}} \right) - \frac{t/t_{\text{tot}}}{1 - t/t_{\text{tot}}} \right] v_d^2,$$

gdzie  $\gamma_d := t_d/t_{\text{tot}}$  a  $v_d$  odpowiada prędkości „smoka”. Dla małych  $\frac{t_{\text{MAX}}}{t_{\text{tot}}}$  formuła ta upraszcza się do

$$C_d(t) = (1 - \gamma_d) [C(t) + \gamma_d v_d^2].$$

która to postać była użyta do porównań z wynikami symulacji.

## Funkcja autokorelacji w obecności superszoku

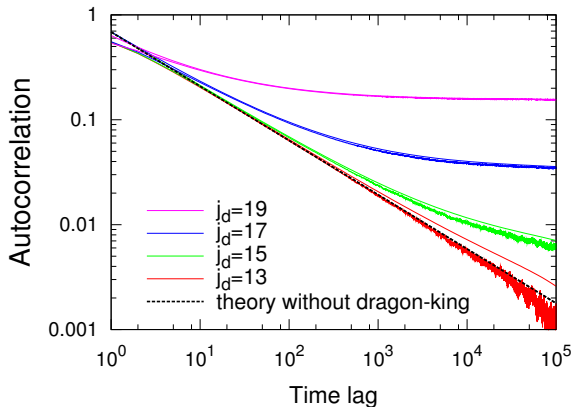
Dla superszoku na funkcję autokorelacji otrzymuje się wzór

$$C_d(t) = C(t) \pm \sqrt{2} \sigma_f \frac{X_d}{t_{\text{tot}} - t} - \left( \frac{X_d}{t_{\text{tot}} - t} \right)^2,$$

gdzie  $\sigma_f := \sqrt{f\sigma_v^2 + C(2t)}$  (z fenomenologicznym parametrem  $0 < f \leq 1$ ) a  $X_d$  jest skokiem „przestrzennym” szokowego zdarzenia supereksternalnego, zachodzącym w czasie zaniedbywalnie małym w skali czasowej procesu.

## Autokorelacje w obecności „długich smoków”

Funkcja autokorelacji prędkości (VAF) w obecności długotrwałych „smoków”

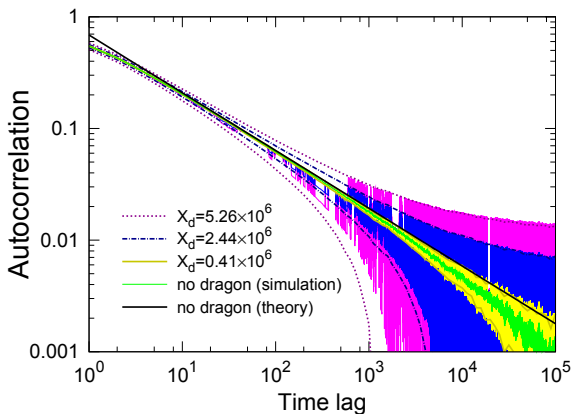


Całkowity czas procesu: 140 000 000 jednostek.



## Autokorelacje w obecności superszoków

Funkcja autokorelacji prędkości (VAF) w obecności „smoków” typu szokowego



Całkowity czas procesu: 140 000 000 jednostek.

## Podsumowanie

*VAF* jest czułym detektorem

- 1 występowania zdarzeń ekstremalnych i superekstremalnych
- 2 odróżniającym różne rodzaje zdarzeń superekstremalnych
- 3 pozwalającym na wyznaczanie parametrów definiujących różne zdarzenia superekstremalne

## Zamierzenia

- 1 analiza danych empirycznych pod kątem występowania i wpływu zdarzeń superekstremalnych
- 2 prognozowanie krachów za pomocą techniki opartej na krytycznym spowolnieniu
- 3 analiza wpływu zdarzeń superekstremalnych na ryzyko