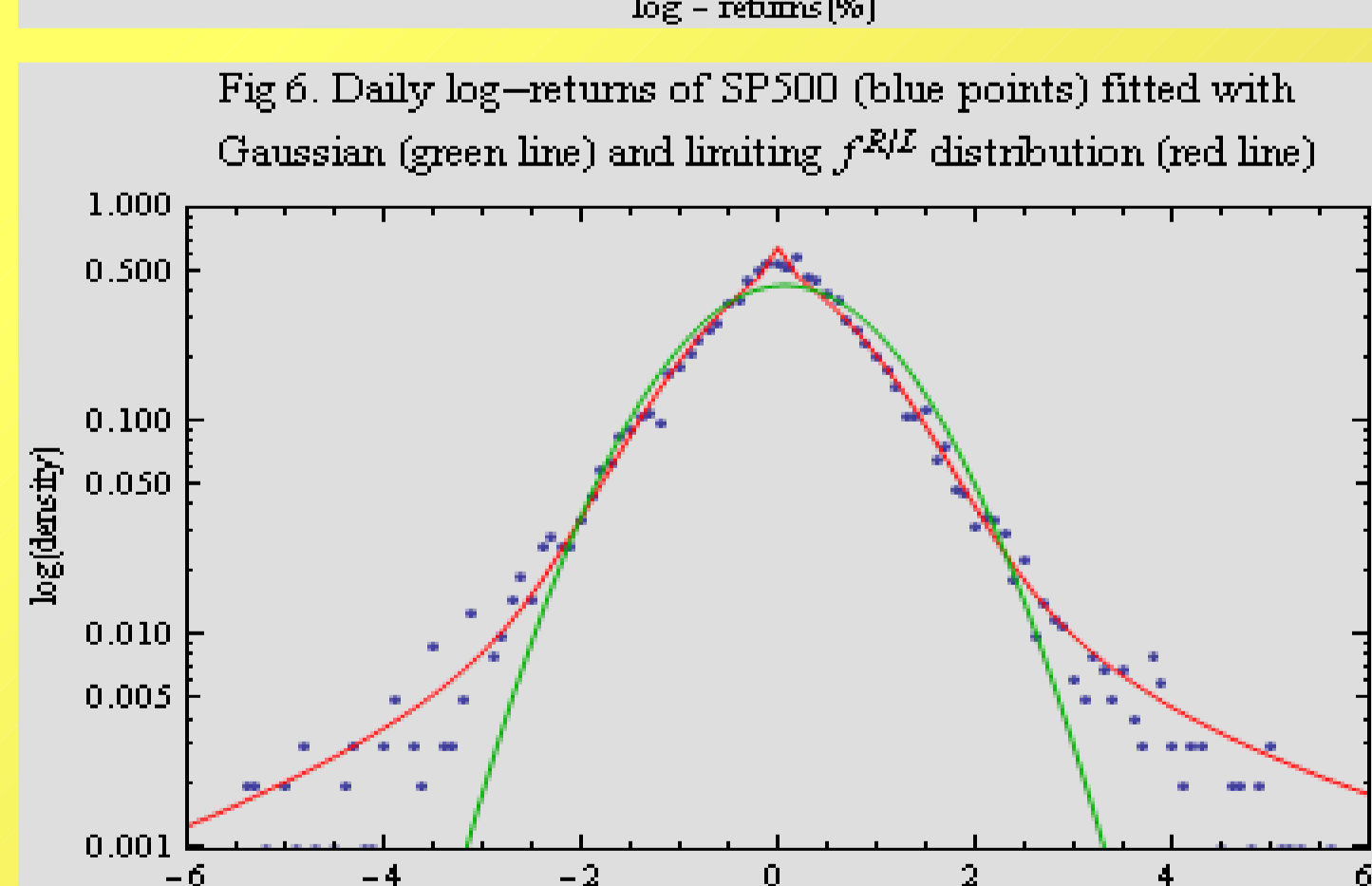
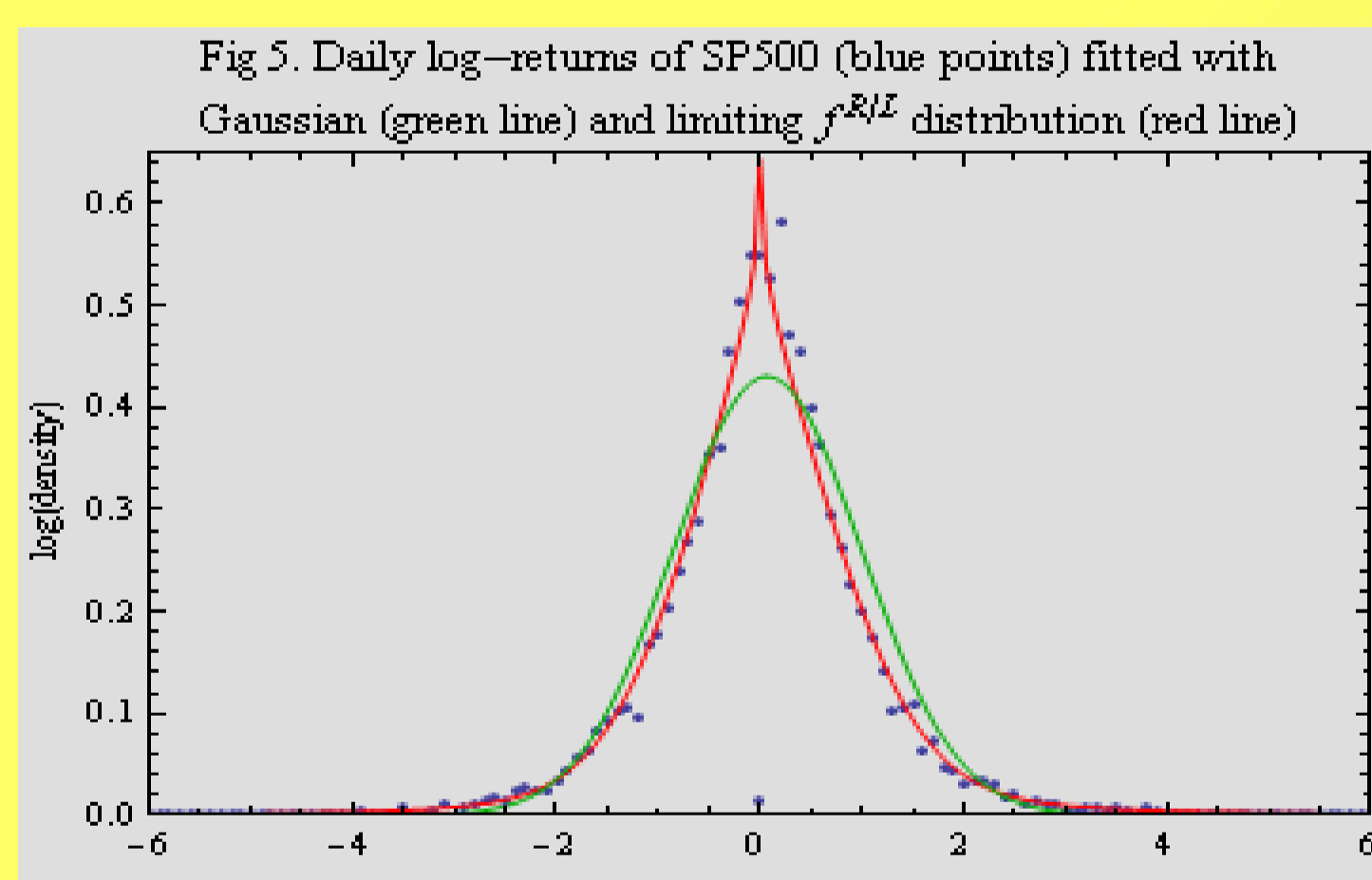
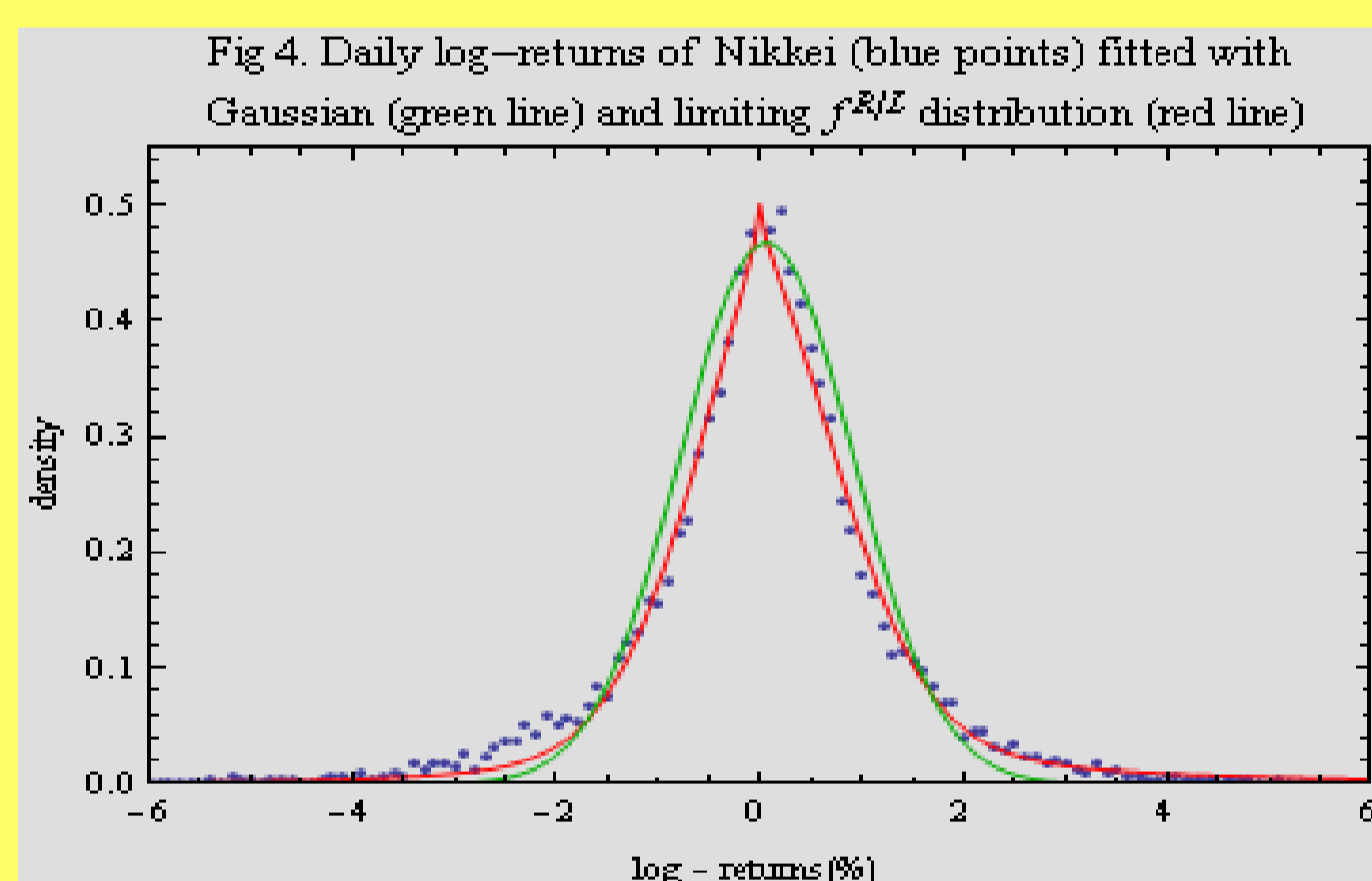
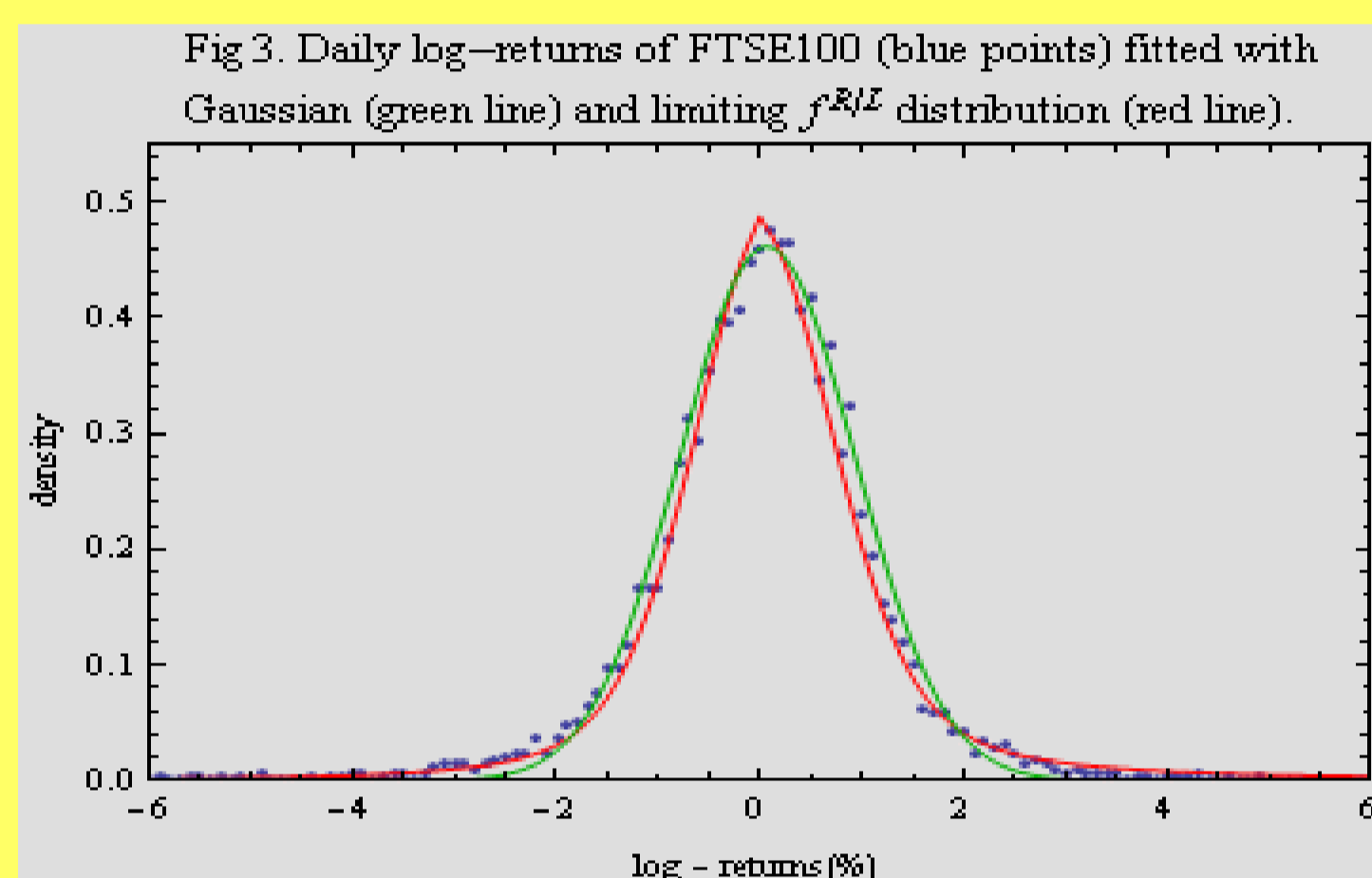
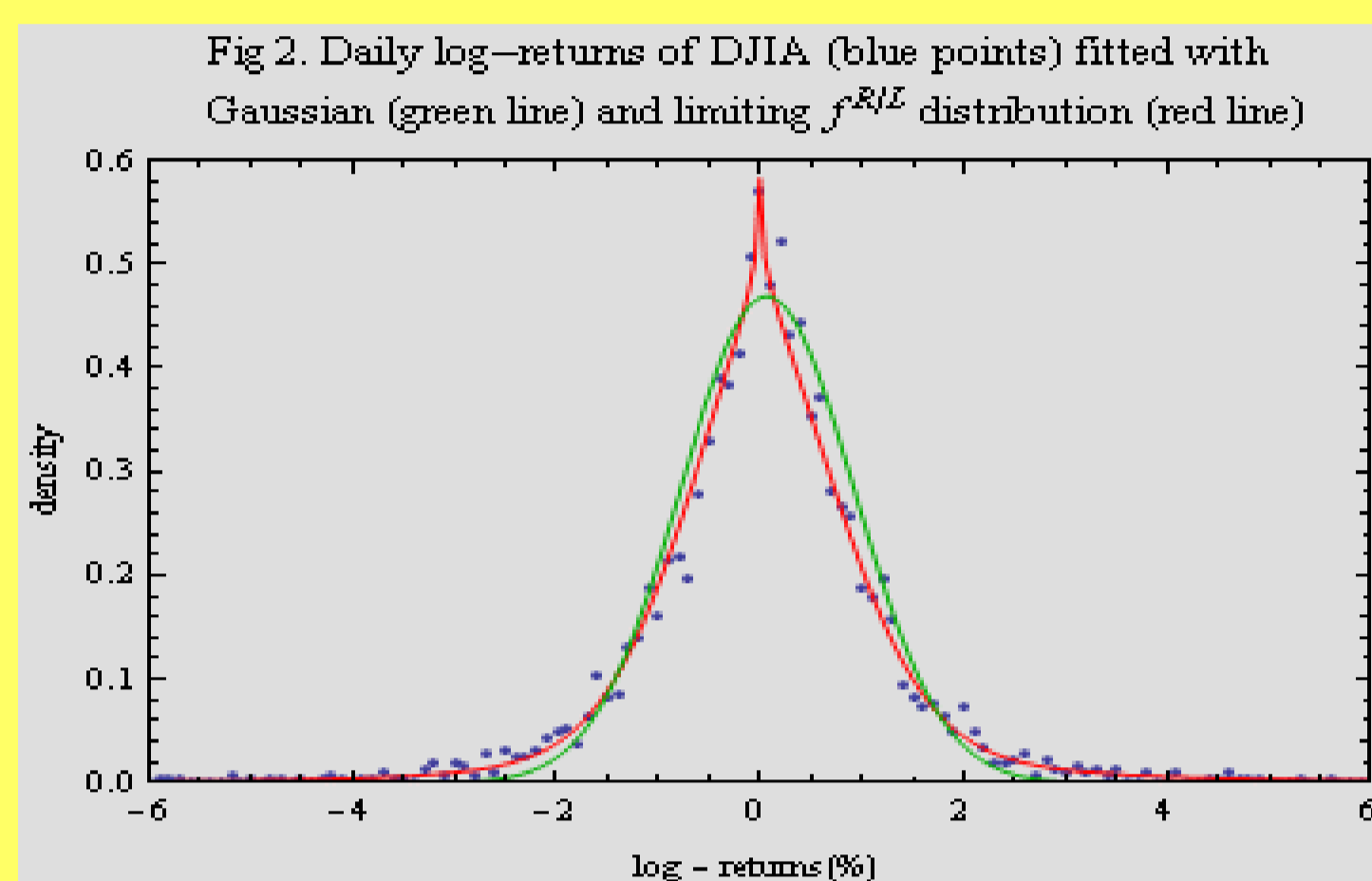
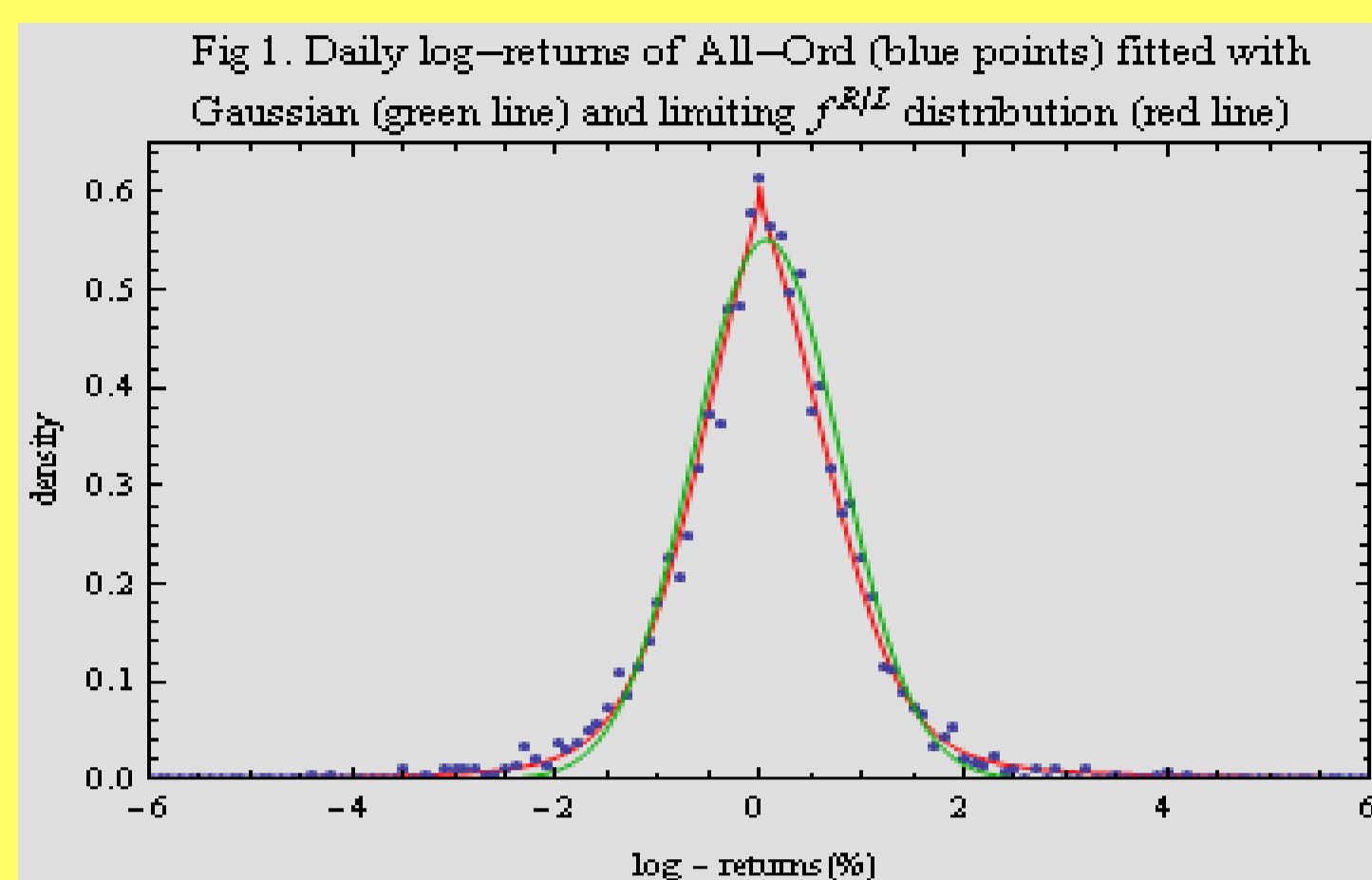


# Zastosowanie błędzenia losowego w czasie ciągłym do modelowania stóp zwrotu i wyceny opcji.

## Wyniki i projekty.

Tomasz Ciepliński, Ryszard Kutner

Instytut Fizyki Doświadczalnej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski  
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa



### •Punkt wyjścia: Model dwumianowy

Model dwumianowy może być podstawą do modelowania dynamiki cen instrumentów finansowych bazowych i pochodnych. W tym dyskretno-czasowym modelu zakładamy, że kolejne zmiany cen są od siebie statystycznie niezależne i wyrażają się wzorem:

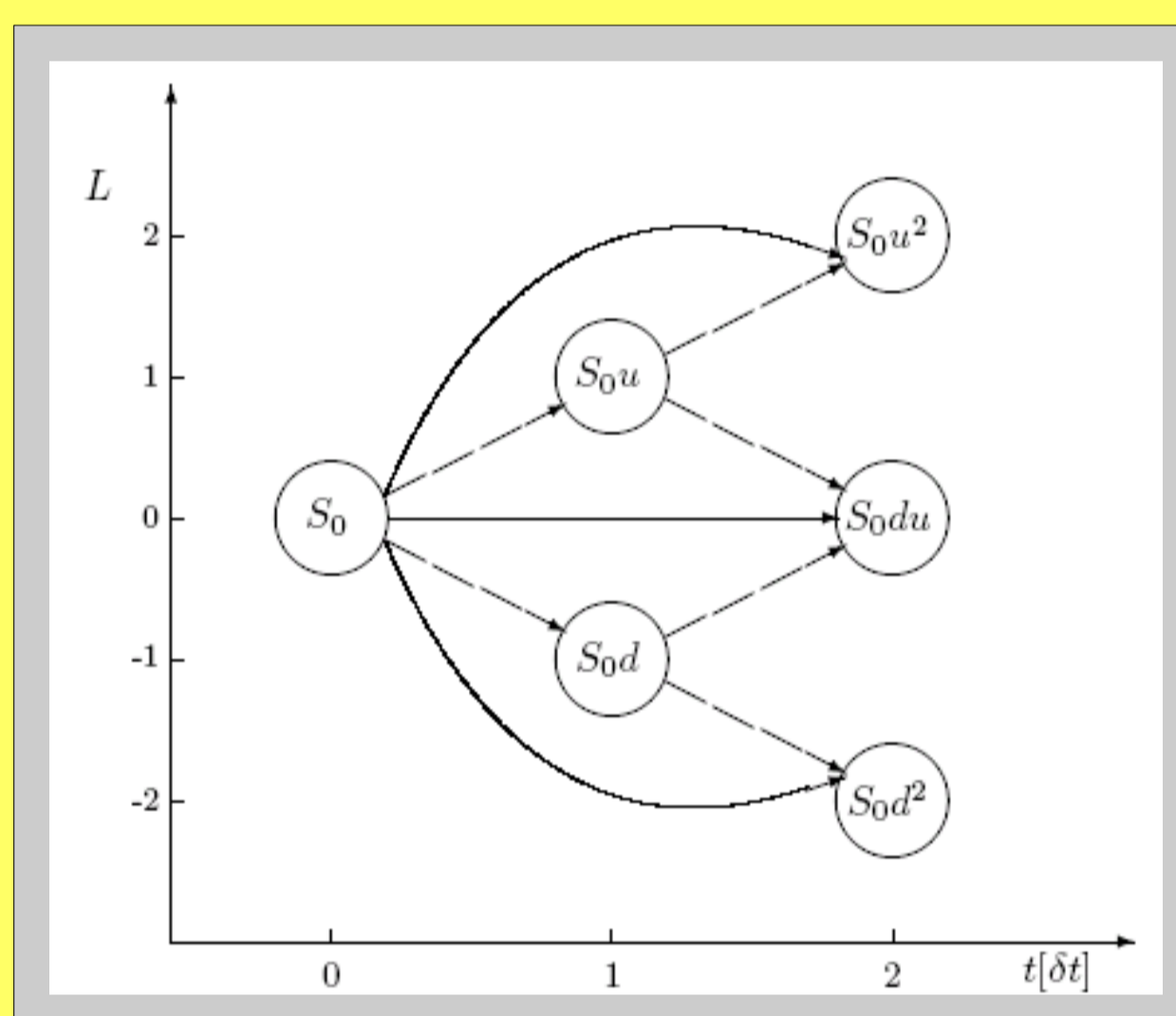
$$S_k = u_n^{\varepsilon_{n,k}} d_n^{1-\varepsilon_{n,k}} S_{k-1}$$

gdzie  $\varepsilon_{n,k}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $B(1, p_n)$ . Powyższy wzór można przedstawić na tzw. drzewie dwumianowym (Rys.1). Przechodząc z czasem pomiędzy krokami do granicy uzyskujemy rozkład normalny logarytmicznych stóp zwrotu z instrumentu bazowego, a co za tym idzie wzór Blacka-Scholesa na wycenę opcji. Obecnie, rzeczywiste zachowanie rynków finansowych jest inne: rozkłady te posiadają wyższe piki oraz grubsze ogony niż rozkład normalny – przedstawiśmy to na załączonych wykresach.

### •Niegaussowskie błędzenie losowe w czasie ciągłym<sup>[1]</sup>.

Do modelu dwumianowego zastosowano specjalną transformację błędzenia losowego w czasie ciągłym. Czas oczekiwania na kolejny krok i zmiana ceny są sumą  $M$  składników odpowiadającym im wielkości z modelu dwumianowego (Rys. 1). Wartość zmiennej losowej  $M$  jest wspólna dla czasu oczekiwania i zmiany ceny, co daje w rezultacie sprzężenie między nimi. Dodatkowo jest ona zmienną losową pochodzącą z rozkładu gruboogonowego:

$$P(M > m) \sim m^{-\gamma}$$



Rys. 1. Przykładowe dwukrokowe drzewo dwumianowe. Krótkie strzałki wskazują możliwe gaussowskie błędzenie ceny akcji  $S$ . Może ona w każdym kroku wzrosnąć  $u_n$  razy lub zmaleć  $d_n$  razy. Długie strzałki pokazują przykładowy krok w modelu niegaussowskim. Następuje on po czasie dwóch okresów i jest sumą dwóch zmian cen w błędzeniu gaussowskim.

Po uciągleniu czasu otrzymujemy graniczną postać rozkładu prawdopodobieństwa logarytmicznych stóp zwrotu ( $f^{R/L}$ ) i związany z nią wzór na wycenę opcji ( $C_0^{R/L}$ ):

$$f_T^{R/L}(\alpha, \sigma, \gamma^R, \gamma^L, p_0; x) = p_0 \frac{\sin(\pi\gamma^R)}{\sqrt{2\pi^3\sigma^2T}} \int_0^1 e^{-\frac{(x-\alpha Ty)^2}{2y\sigma^2T}} \frac{y^{R-3/2}}{(1-y)^{\gamma^R}} dy + (1-p_0) \frac{\sin(\pi\gamma^L)}{\sqrt{2\pi^3\sigma^2T}} \int_1^\infty e^{-\frac{(x-\alpha Ty)^2}{2y\sigma^2T}} \frac{y^{-3/2}}{(y-1)^{\gamma^L}} dy$$

$$C_0^{R/L}(p_0) = p_0 C_0^R + (1-p_0) C_0^L$$

$$C_0^R(\alpha, \gamma) = S_0 \frac{\sin(\pi\gamma^R)}{\pi} \int_0^1 \Phi(d_+(y)) \frac{y^{R-1}}{(1-y)^{\gamma^R}} dy - K \frac{\sin(\pi\gamma^R)}{\pi} \int_0^1 e^{-rTy} \Phi(d_-(y)) \frac{y^{R-1}}{(1-y)^{\gamma^R}} dy$$

$$C_0^L(\alpha, \gamma) = S_0 \frac{\sin(\pi\gamma^L)}{\pi} \int_1^\infty \Phi(d_+(y)) \frac{y^{-1}}{(y-1)^{\gamma^L}} dy - K \frac{\sin(\pi\gamma^L)}{\pi} \int_1^\infty e^{-rTy} \Phi(d_-(y)) \frac{y^{-1}}{(y-1)^{\gamma^L}} dy$$

### •Wnioski

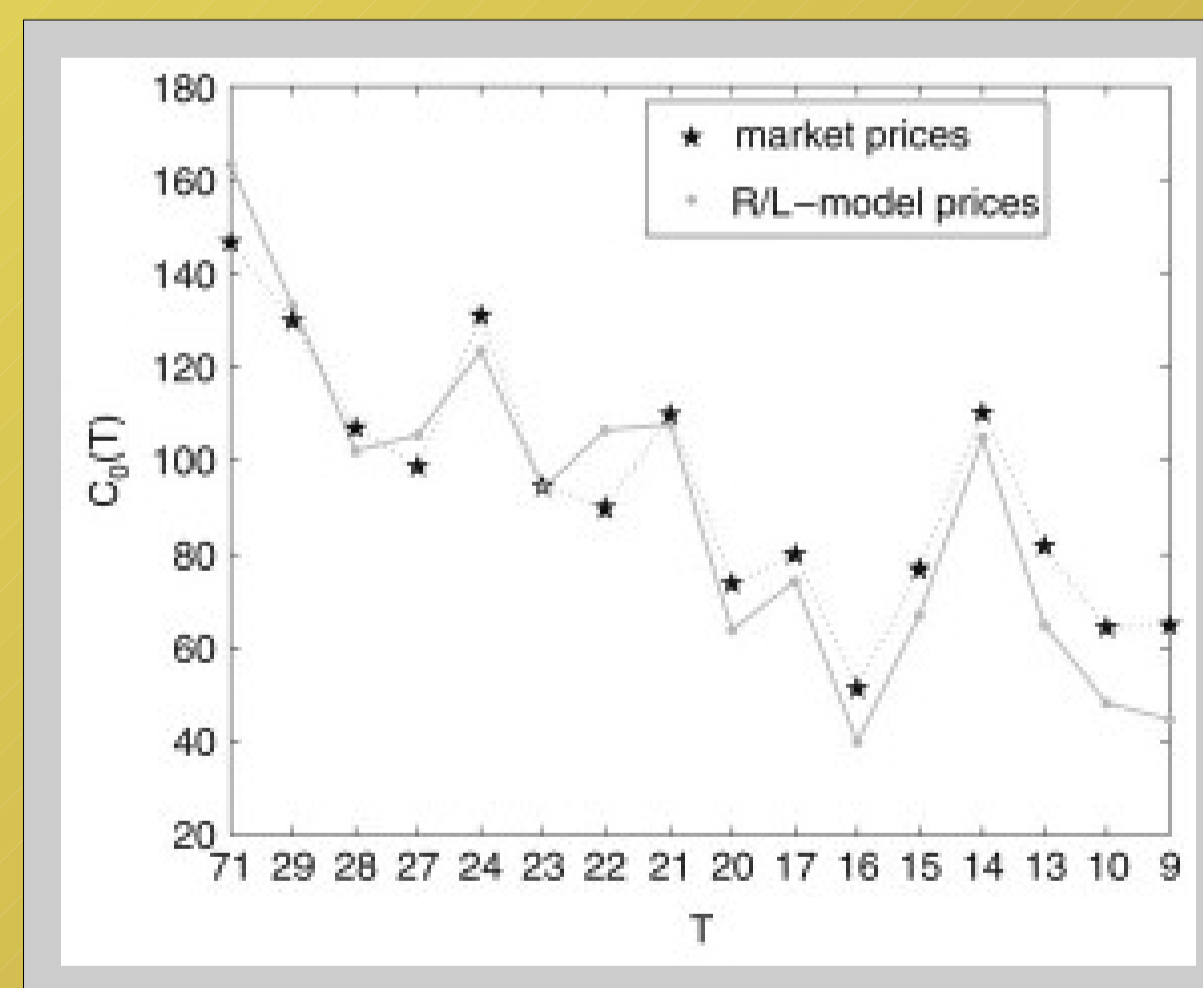
- Ogromna większość instrumentów finansowych przejawia niegaussowskie zachowanie.

- Giełdy o dużej płynności (dojrzałe) dają się opisywać modelem błędzenia przypadkowego w czasie ciągłym. Giełdy rynków wschodzących są mniej stabilne w tym sensie, że mają znacznie większe zmienności i charakteryzują się większą kurtozą.

- Wartości parametrów charakteryzujące instrumenty finansowe wskazują dominację rozkładów posiadających pogrubione ogony.

- Obserwuje się asymetrię ogonów ogonów rozkładów, za które odpowiedzialne są nadmierne straty (szczególnie obserwuje się to dla giełd azjatyckich).

- Continuous-time random walk jest obiecującym modelem opisującym dynamikę cen instrumentów bazowych oraz wyceny opcji.



Rys. 2. Porównanie ceny europejskiej opcji kupna stu kontraktów na index S&P500 z teoretycznym wzorem  $C_0^{R/L}$  [1]. Rysunek pochodzi z pracy A. Jurlewicz, A. Wołyńskiej i P. Żebrowskiego z Phys. A 388

### •Opis parametrów

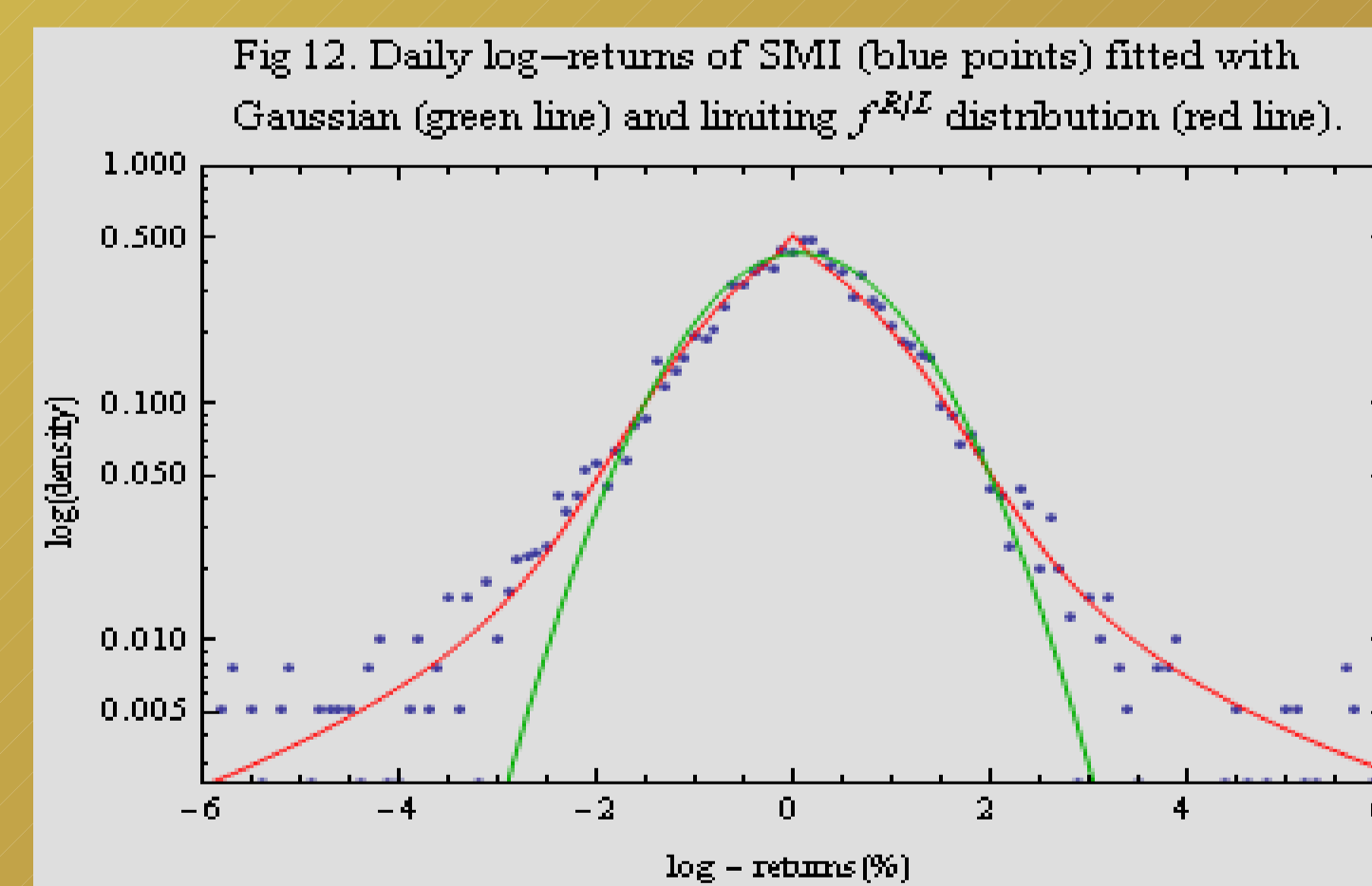
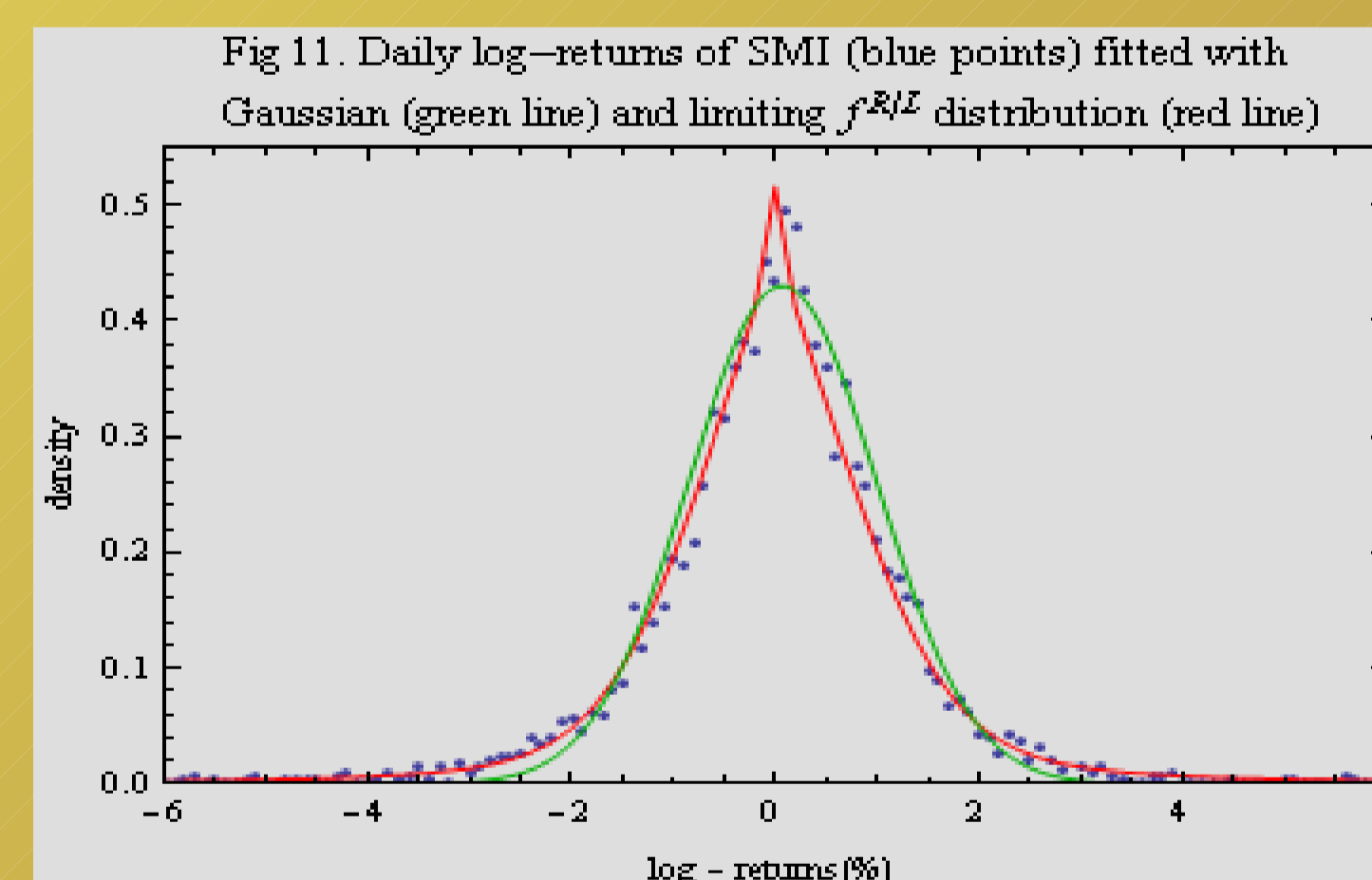
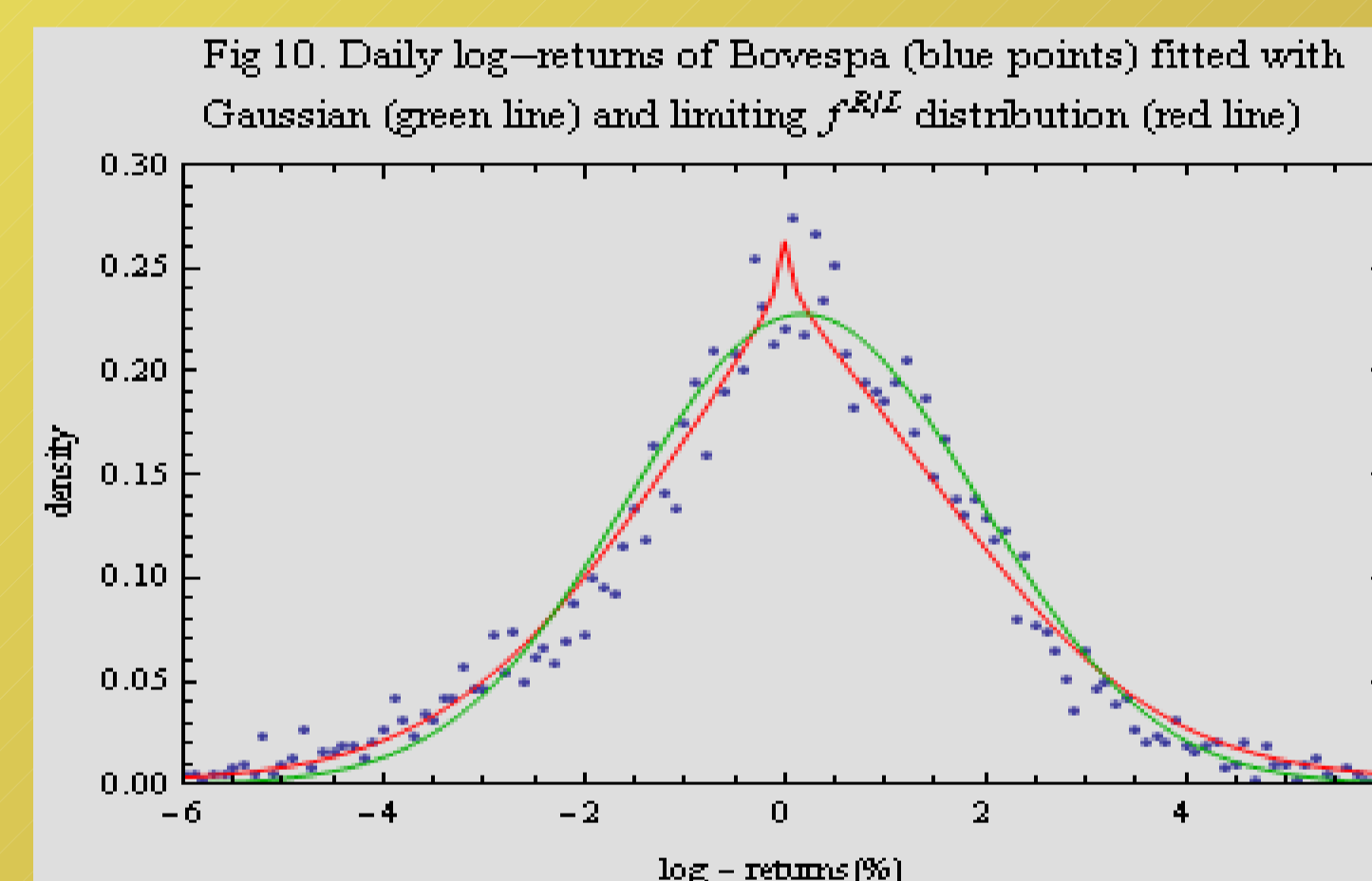
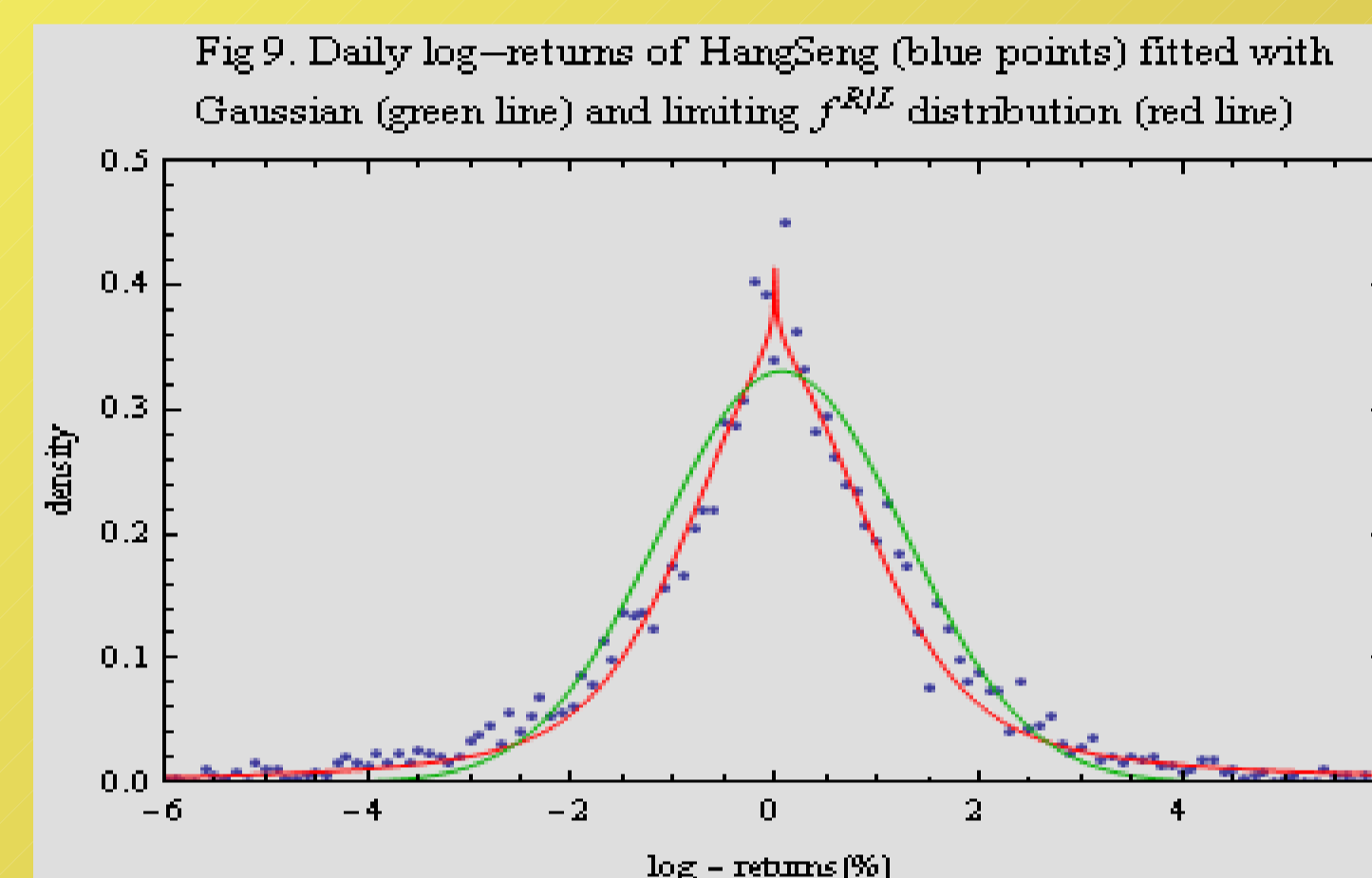
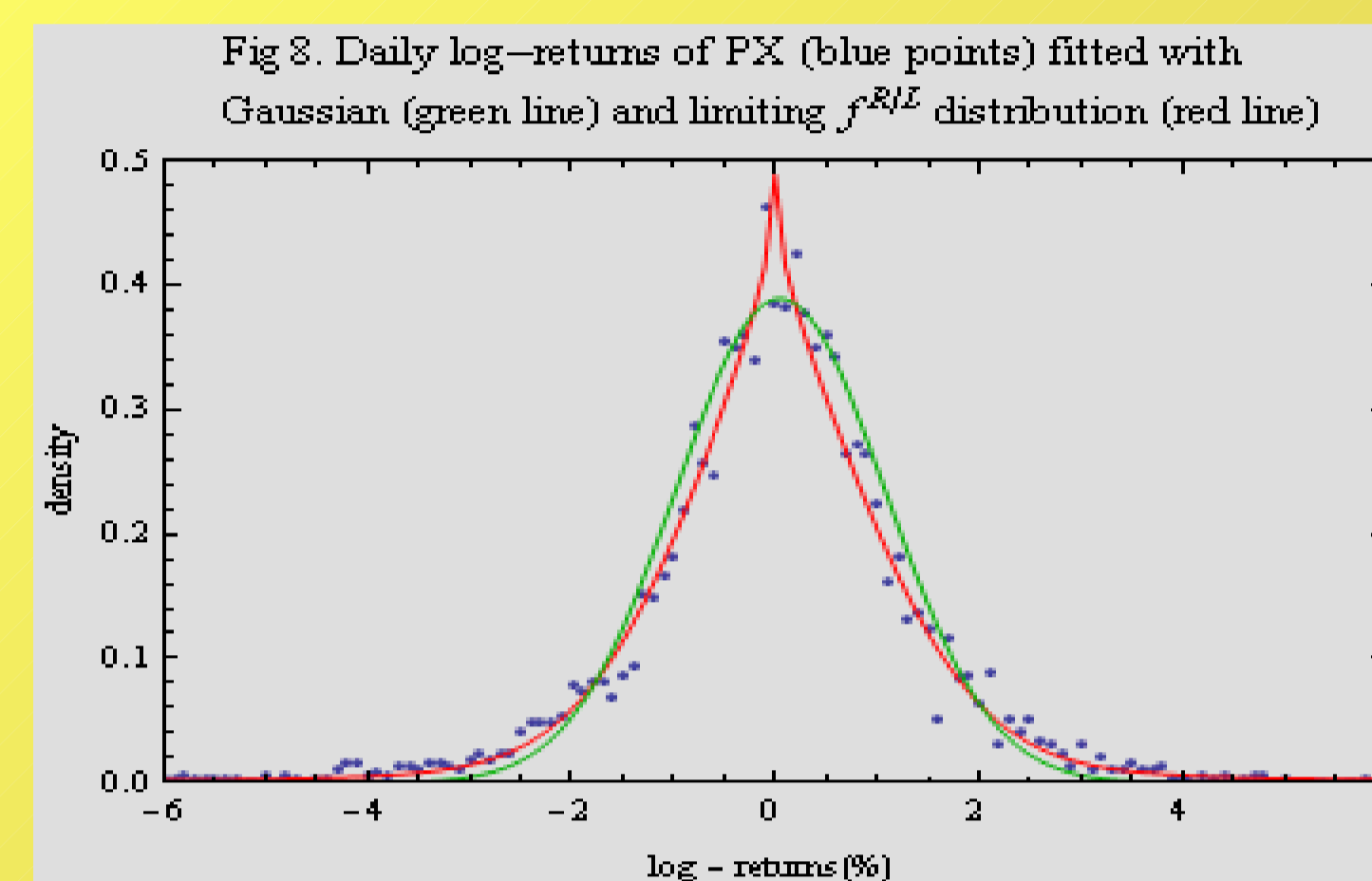
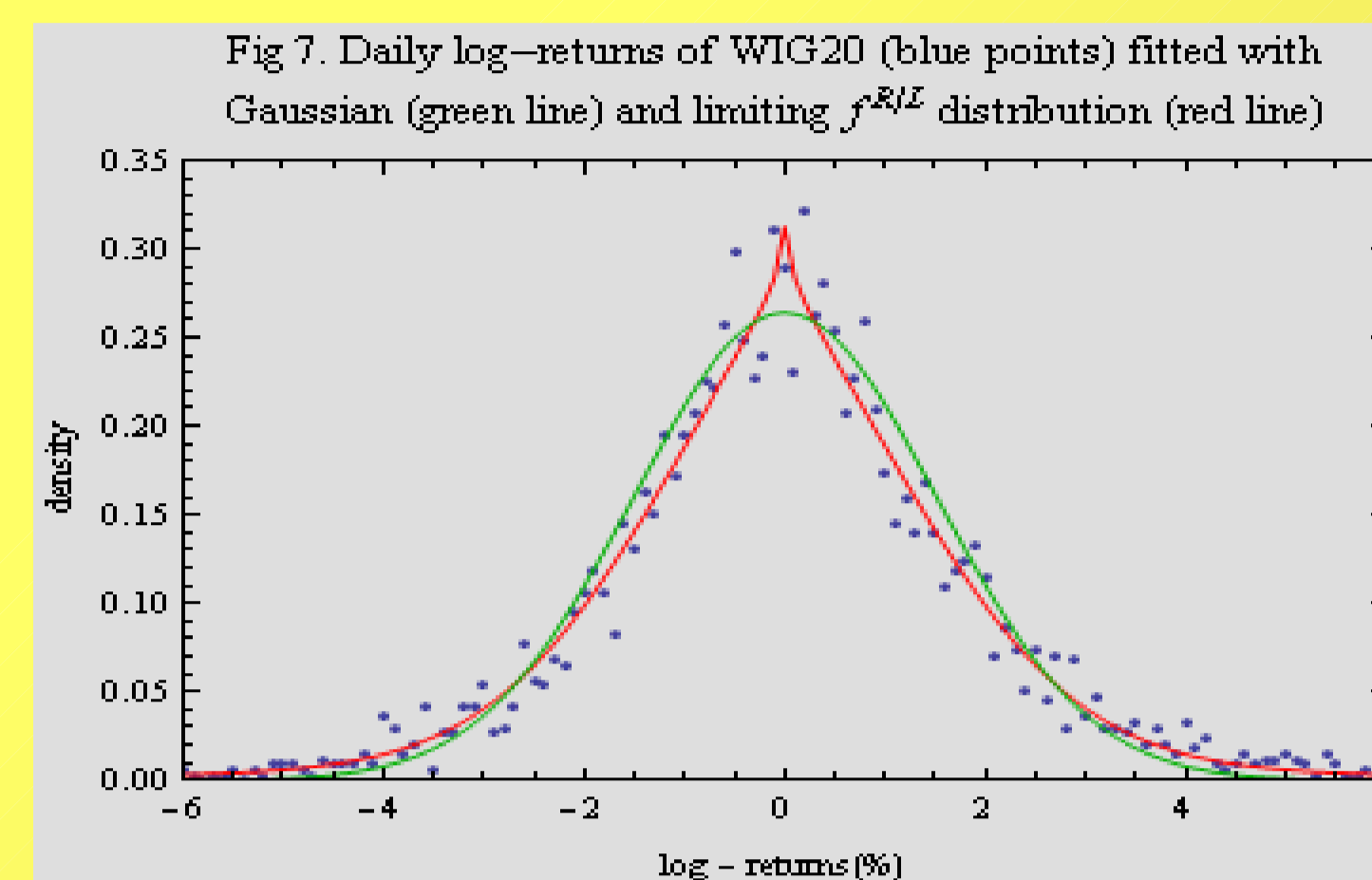
Parametry  $\alpha$  i  $\sigma$  ma taką samą interpretację jak dla rozkładu Gaussa – oznaczają skośność i zmienność.

Parametry  $\gamma$  mogą przyjmować wartości z przedziału (0,1).

Parametr  $\gamma^R$  odpowiada za ostre szczyty wykresów. Im mniejsza wartość parametru tym pik jest wyższy i ostrzejszy.

Parametr  $\gamma^L$  odpowiada za pogrubione ogony rozkładów. Im mniejsza wartość parametru tym ogon jest grubszy.

Parametr  $p$  z przedziału [0,1] decyduje, która z charakterystyk  $R$  czy  $L$  dominuje w rozkładzie.



### •Plany na przyszłość

Porównywanie rzeczywistych cen opcji z modelami teoretycznymi. Badanie korelacji powrotnej na rynkach finansowych w ramach błędzenia losowego w czasie ciągłym [2]. Uogólniony proces CEV – pozytywne sprzężenie zwrotne [3].

### •Bibliografia

- [1] A. Jurlewicz, A. Wołyńska, P. Żebrowski. Continuous-time random walk approach to the Rachev-Ruschendorf model for financial data. Phys. A 388 (2009) 407.
- [2] T. Gubiec, R. Kutner. Backward jump continuous-time random walk: An application to market trading. Phys. Rev. E 82, 046119 (2010).
- [3] St. Reimann, V. Gontis, M. Alaburda. Interplay between positive feedbacks in the generalized CEV process.

Market	alpha	sigma	gamma R	gamma L	p
SP500	0.045	0.84	0.7	0.66	0.48
DJIA30	0.025	0.81	0.69	0.65	0.32
BOVESPA	0.12	1.95	0.75	0.78	0.53
FTSE100	0.03	0.66	0.85	0.57	0.19
SMI	0.025	0.89	0.73	0.59	0.41
CAC40	0.03	0.99	0.85	0.59	0.45
WIG20	0.01	1.59	0.76	0.69	0.55
PX	0.025	1.15	0.75	0.44	0.76
BUX	0.04	1.17	0.84	0.35	0.35
HANGSENG	0.02	0.81	0.65	0.47	0.12
NIKKEI	0.065	0.83	0.81	0.46	0.55
ALL ORD	0.025	0.68	0.79	0.65	0.4